Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Самосопряженность и дискретность спектра блочных якобиевых матриц

Научный руководитель – Маламуд Марк Михайлович

Будыка Виктория Сергеевна

Кандидат наук

Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: vikulyarus17@gmail.com

Рассмотрим блочные якобиевы матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathcal{B}_0^* & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathcal{B}_1^* & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathbb{O}_p & \dots & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots & \mathcal{B}_{n-1}^* & \mathcal{A}_n & \mathcal{B}_n & \mathbb{O}_p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^*$, $\mathcal{B}_n \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $\det \mathcal{B}_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{O}_p$ — нулевая матрица, и $\mathbb{C}^{p\times p}$ – множество всех $p \times p$-матриц с элементами из $\mathbb{C}$. С матрицей $\mathbf{J}$ ассоциируют минимальный якобиев оператор в $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^p)$. Оператор $\mathbf{J}$ симметричен, но не обязательно самосопряжен.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{J}$ *— минимальный оператор ассоциированный в* $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^p)$ *с блочной якобиевой матрицей вида* (1) *и спектр диагонального оператора* $\mathcal{A}$ *дискретен. Пусть также для некоторого* $N \in \mathbb{N}_0$ *выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $\sup\limits_{n\geq N}\|\mathcal{A}_n^{-1}\cdot\mathcal{B}_n\| < \frac{1}{2}$, $\qquad \sup\limits_{n\geq N}\|\mathcal{A}_n^{-1}\cdot\mathcal{B}_{n-1}^*\| < \frac{1}{2}$;

(ii) $\sup\limits_{n\geq N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^2 + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|^2\Big) < \frac{1}{2}$;

(iii) *оператор* $\mathcal{A}$ *– положительно определен и*

$$\sup_{n\geq N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1/2}\mathcal{B}_n\mathcal{A}_{n+1}^{-1/2}\| + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1/2}\mathcal{B}_{n+1}^*\mathcal{A}_{n+1}^{-1/2}\|\Big) < 1.$$

Тогда оператор $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$ *имеет дискретный спектр.*

Эта работа основана на статье [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Источники и литература

1) *Будыка В. С., Маламуд М. М. Самосопряженность и дискретность спектра блочных якобиевых матриц. Матем. заметки. 2020. Том. 108:3, стр. 457–462.*