Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Выметание мер относительно логарифмических ядер и полярные множества

Научный руководитель – Хабибуллин Булат Нурмиевич

Меньшикова Энже Булатовна

Аспирант

Башкирский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия

E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru

В предыдущих наших исследованиях [1]–[2] была выявлена значительная роль понятия выметания мер в исследовании распределения нулей голоморфных функций при ограничениях на их рост. В то же время стало понятно, что существенным препятствием к применениям этого подхода может оказаться то, что выметенные меры могут принимать ненулевые значения на очень малых множествах. Предлагаются варианты преодоления этой сложности. Для простоты рассматриваем только *положительные меры Радона* μ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с *нулевым показателем сходимости* в том смысле, что

$$\int_1^{+\infty} \mu\Bigl(\bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| \leqslant t\bigr\}\Bigr)\frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty, \quad \text{откуда } \mathrm{pt}_\mu(z) := \int \ln|w-z|\,\mathrm{d}\mu(w) \not\equiv -\infty,$$

и *логарифмический потенциал* pt_μ корректно определён на $\mathbb{C}$ значениями из $[-\infty, +\infty)$.

Меру ω называем $\ln$-*выметанием* меры δ, если $\mathrm{pt}_\delta(z) \leqslant \mathrm{pt}_\omega(z)$ для каждой точки $z \in \mathbb{C}$.

Теорема ([3; теорема 1]). *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — ограниченное и полярное, т.е. $\mathrm{pt}_\mu \equiv -\infty$ на E для некоторой меры μ с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu$, а мера ω — это $\ln$-выметание меры δ. Тогда справедливы следующие три утверждения:*

I. *Если носитель $\operatorname{supp}\delta$ — компакт, то $\omega(E \setminus \operatorname{supp}\delta) = 0$.*

II. *Если мера δ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{C}$, то $\omega(E) = 0$.*

III. *Если конечен каждый потенциал $\int \mathsf{pt}_\nu\,\mathrm{d}\delta \neq \pm\infty$ для любой меры ν с компактным носителем на $\mathbb{C}$, то $\omega(E) = 0$.*

Условие ограниченности полярного множества E прописано лишь для краткости формулировки теоремы и оно легко снимается [4]–[5]. В работе [3] на основе статьи [1] также отмечено, что для других типов выметания мер, например относительно полиномов, выметенная мера может не обращаться в нуль на широком классе полярных множеств E даже при удалении из них носителя $\operatorname{supp}\delta$. Свойства выметания мер из этой теоремы позволяют и далее развивать методы и результаты из [1]–[3].

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ (проект № 19-31-90007).

Источники и литература

1) Меньшикова Э. Б., Хабибуллин Б. Н. К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II // Функц. анализ и его прил., **53**:1 (2019), 84–87

2) Меньшикова Э. Б., Хабибуллин Б. Н. Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на ее рост // Изв. вузов. Матем., № 5 (2020), 55–61

3) Khabibullin B. N., Menshikova E. B. Balayage of Measures with respect to Polynomials and Logarithmic Kernels on the Complex Plane // Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**:4 (2021) (to appear)

4) Ransford Th., Potential Theory in the Complex Plane, Cambridge University Press, Cambridge, 1995
5) Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, Мир, М., 1980