Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Дифференцируемость решений стационарных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова по параметру

Научный руководитель – Богачев Владимир Игоревич

Салахов Дамир Ильдарович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: damir-salakhov@mail.ru

Предположим, что для каждого $\alpha \in [0,1]$ нам дан следующий эллиптический оператор второго порядка

$$L_\alpha \phi = a_\alpha^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \phi + b_\alpha^i \partial_{x_i} \phi, \qquad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

с вещественными коэффициентами b_α^i на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющими следующему условию: для каждого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ имеем

$$\sup_\alpha \|b_\alpha^i\|_{L^p(U)} \leqslant M(U) < \infty, \tag{1}$$

где $p = p(U) > d$.

Предположим также, что для всякого α есть единственная вероятностная мера μ_α, удовлетворяющая уравнению $L_\alpha^* \mu_\alpha = 0$.

В работе [6] приведены достаточные условия для дифференцируемости решений стационарного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова по параметру в виде следующей теоремы

Теорема 1: *Пусть выполнены условия (1). Предположим, что для каждого шара U отображения $\alpha \mapsto a_\alpha^{ij}|_U$, $\alpha \mapsto \partial_{x_k} a_\alpha^{ij}|_U$ и $\alpha \mapsto b_\alpha^i|_U$ в $L^1(U)$ непрерывно дифференцируемо. Положим*

$$B_\alpha = \left(\partial_\alpha b_\alpha^1, \ldots, \partial_\alpha b_\alpha^d\right), S_\alpha = \left(\partial_\alpha a_\alpha^{ij}\right)_{i,j \le d}, R_\alpha = \left(R_\alpha^1, \ldots, R_\alpha^d\right), R_\alpha^i = \partial_\alpha \partial_{x_j} a_\alpha^{ij}.$$

Будем предполагать, что выпуклые комбинации $\Lambda_{\alpha,\theta} := \theta A_\alpha + (1-\theta) A_{\alpha_0}$ для некоторого фиксированного $\alpha_0 \in (0,1)$ удовлетворяют оценке (с операторной нормой)

$$\sup_{\theta \in [0,1]} \sup_{\alpha, x} \left\| \Lambda_{\alpha,\theta}^{1/2}(x) \partial_\alpha \Lambda_{\alpha,\theta}(x) \Lambda_{\alpha,\theta}^{-1/2}(x) \right\| \leqslant \lambda_0 < \infty \tag{2}$$

Предположим, что существует такая функция $V \in C^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, что $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ и вне некоторого шара при всех α имеем

$$L_\alpha V(x) \leqslant -W(x),$$

где $W \ge 0$ – борелевская функция с $\lim_{|x|\to\infty} W(x) = +\infty$. Предположим также, что для некоторых чисел $C_V, m \geqslant 1$ мы имеем

$$|b_\alpha|^2 + \left|A_\alpha^{-1/2}\left(\partial_\alpha b_\alpha - \partial_\alpha \operatorname{div} A_\alpha\right)\right|^2 + |L_\alpha V| \leqslant C_V V^m W, \tag{3}$$

$$\langle A_\alpha \nabla V, \nabla V \rangle \leqslant C_V V^m. \tag{4}$$

Наконец, допустим, что для некоторого $\varepsilon < \frac{1}{4m+1}$ имеется шар, вне которого при всех α имеем

$$\langle A_\alpha \nabla V, \nabla V\rangle \leqslant \varepsilon V W. \tag{5}$$

Тогда производная $\partial_\alpha \varrho_\alpha$ *существует и при каждом* $\alpha \in (0,1)$ *удовлетворяет уравнению*

$$L_\alpha^* \partial_\alpha \rho_\alpha = \operatorname{div}\left(B_\alpha \varrho_\alpha - R_\alpha \varrho_\alpha - S_\alpha \nabla \varrho_\alpha\right).$$

Напомним, что отображение $\alpha \mapsto f_\alpha$ из $(0,1)$ в $L^p(U)$ дифференцируемо, если существует отображение $\alpha \mapsto g_\alpha$ из $(0,1)$ в $L^p(U)$ такое, что $(f_{\alpha+s} - f_\alpha)/s \to g_\alpha$ в $L^p(U)$ при $s \to 0$ с фиксированным $\alpha \in (0,1)$. Если $\alpha \mapsto g_\alpha$ непрерывно, то f_α непрерывно дифференцируемо в L^p.

Условие (2) выполнено, если операторы $A, A^{-1}, \partial_\alpha A_\alpha$ равномерно ограничены. Оно очевидным образом выполнено, если $A_\alpha(x)$ не зависит от α для всех x вне некоторого шара и $\partial_\alpha A_\alpha$ ограничено. Наконец, оно также выполнено, если операторы $A_\alpha(x)$ коммутируют при различных α и $\partial_\alpha A_\alpha$ ограничено.

Условия (4) и (5) выглядят похожими. В общем случае они независимы, но если W много сильнее, чем V, скажем, $W \leqslant V^m$, то (4) влечет (5). С другой стороны, если W умеренно по сравнению с V, скажем, $W \leqslant V^{m-1}$, то (5) на всем пространстве влечет (4).

При этом доказательство данного результата в цитируемой работе довольно сложно аналитически для распространения на более высокие порядки дифференцируемости.

Цель данного доклада представить иной метод доказательства достаточных условий для дифференцируемости по параметру α решений стационарного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с матрицей диффузии $A_\alpha(x) = I_d$, где I_d является единичной матрицей порядка d, с помощью которого можно вывести условия дифференцируемости второго порядка.

Источники и литература

1) В. И. Богачев, А. И. Кириллов, С. В. Шапошников. Расстояния между стационарными распределениями диффузий и разрешимость нелинейных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова. Теория вероятн. и ее примен., 2017, том 62, выпуск 1, стр. 16 – 43.

2) Vladimir I. Bogachev, Nicolai V. Krylov, Michael Röckner, Stanislav V. Shaposhnikov. Fokker–Planck–Kolmogorov Equations.

3) V. I. Bogachev, A. I. Kirillov, and S. V. Shaposhnikov. On Probability and Integrable Solutions to the Stationary Kolmogorov Equation. Doklady Mathematics, 2011, Vol. 83, No. 3, pp. 309 – 313.

4) V. I. Bogachev, N. V. Krylov, M. Rockner. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. Comm. Partial Differential Equations, 26:11-12 (2001), pp. 2037 – 2080.

5) В. И. Богачев, Н. В. Крылов, М. Рекнер. Эллиптические и параболические уравнения для мер. УМН, 2009, том 64, выпуск 6(390), стр. 5 – 116.

6) Alexander Yu. Veretennikov, Vladimir I. Bogachev and Stanislav V. Shaposhnikov. Differentiability of solutions of stationary Fokker–Planck–Kolmogorov equations with respect to a parameter. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Volume 36, Number 7, July 2016, pp. 3519 – 3543.

7) V. I. Bogachev, M. Rockner and S. V. Shaposhnikov. On positive and probability solutions of the stationary Fokker–Planck–Kolmogorov equation. Dokl. Math., 85 (2012), pp. 350 – 354.