Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Некоторые экстремальные задачи для финитных положительно определённых функций на вещественной оси

Научный руководитель – Заставный Виктор Петрович

Манов Анатолий Дмитриевич

Аспирант

Донецкий национальный университет, Факультет математики и информационных технологий, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецк, Украина

E-mail: manov.ad@ro.ru

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f \in \Phi(\mathbb{R})$), если для любого $n \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geqslant 0.$$

Пусть $\sigma > 0$. Обозначим символом $\mathfrak{F}_\sigma$ множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\varphi(0) = 1$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$.

В работе рассматривается следующая задача: *пусть* $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$ *и* $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. *Требуется найти следующие величины*:

$$M(\rho, \sigma) = \sup \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\rho(x)dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \right\},\ m(\rho, \sigma) = \inf \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\rho(x)dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \right\}.$$

Доказана следующая теорема, которая даёт решение поставленной задачи.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma > 0$, $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$, $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$ *и пусть оператор* A_ρ *определён следующим образом*:

$$(A_\rho u)(t) := \int\limits_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \overline{\rho(t-x)} u(x)dx,\ -\sigma/2 \leqslant t \leqslant \sigma/2,\ u \in L_2[-\sigma/2, \sigma/2].$$

Тогда A_ρ *– ограниченный самосопряжённый оператор в* $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ *и имеют место следующие равенства*:

$$M(\rho, \sigma) = \sup(\operatorname{spec} A_\rho), \quad m(\rho, \sigma) = \inf(\operatorname{spec} A_\rho),$$

где $\operatorname{spec} A_\rho$ *– спектр оператора* A_ρ.

Отметим, что теорема 1 является аналогом теоремы Сасса (см. [1]) и идея доказательства по существу та же.

Источники и литература

1) Egerváry E. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome / E. Egerváry, O. Szász // Math. Zeitschr. – 1928. – Bd. 27. – S. 641 – 652.