

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами

Научный руководитель – Савин Антон Юрьевич

Жуйков Константин Николаевич

Аспирант

Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: zhuykovcon@gmail.com

Понятие η -инварианта было введено в знаменитой работе Атьи, Патоди и Зингера [2] для эллиптических самосопряжённых псевдодифференциальных операторов (далее ПДО) на замкнутом многообразии. Он по определению является спектральным инвариантом и участвует во многих формулах индекса. Важное обобщение η -инварианта было дано Мельроузом в [3]. А именно, было предложено рассматривать семейства $D(p)$ ПДО с параметром $p \in \mathbb{R}$, и η -инвариант семейства определялся как специальная регуляризация числа вращения, представимого выражением

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr} \left(D^{-1}(p) \frac{dD(p)}{dp} \right) dp,$$

где семейство $D(p)$ является эллиптическим и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$.

Цель данной работы состоит в том, чтобы определить η -инвариант для следующего класса семейств с параметром:

$$D(p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k(p) e^{2\pi i k p} : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X), \quad (1)$$

где X — гладкое замкнутое многообразие, $D_k(p)$ — семейство ПДО на многообразии X с параметром $p \in \mathbb{R}$. Семейства вида (1) возникают, например, в условиях эллиптичности ПДО со сдвигами на многообразиях с коническими точками (см. [1]).

Мы определяем η -инвариант семейств вида (1), вводя некоторые регуляризации для следа tr и интеграла, и получаем его основные свойства. А именно, η -инвариант в смысле данной работы удовлетворяет логарифмическому свойству и является обобщением η -инварианта Мельроуза (т.е. совпадает с последним в случае обычных ПДО с параметром). Также получена формула вариации η -инварианта при изменении семейства.

Результаты получены в совместной работе с А.Ю. Савиным. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 19-01-00574).

Источники и литература

- 1) А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин. Эллиптические G -операторы на многообразиях с изолированными особенностями. *СМФН*, 59:173–191, 2016.
- 2) M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:43–69, 1975.
- 3) R. Melrose. The eta invariant and families of pseudodifferential operators. *Math. Research Letters*, 2(5):541–561, 1995.