Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

# Геометрическая интерпретация энтропии

**Научный руководитель – Гуревич Борис Маркович**

***Дворкин Григорий Дмитриевич***
*Студент (специалист)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и случайных процессов, Москва, Россия
*E-mail: grisha230531415@gmail.com*

Метрическая энтропия (энтропия Колмогорова-Синая) — один из важнейших инвариантов в теории динамических систем. Однако во многих важных случаях явно, даже приближенно, вычислить энтропию, исходя из её определения, не удаётся. В докладе рассматривается возможность эквивалентного определения энтропии, более удобного для её приближенного вычисления. Такой подход впервые был предложен Г.М. Заславским [1], который сформулировал утверждение о том, что объем границы малого шара в фазовом пространстве растет экспоненциально по времени с показателем, равным метрической энтропии. Правда, буквально понимать это утверждение нельзя, так как при таком понимании оно неверно.

Уточнить утверждение Заславского удалось Б.М. Гуревичу в [2], который предложил считать время наблюдения медленно растущей функцией радиуса шара. Новая формулировка выглядит следующем образом: пусть $T$ — преобразование метрического пространства $X$, сохраняющее борелевскую эргодическую вероятностную меру $\mu$. Тогда для всякой положительной целочисленной функции $t(.)$ (времени наблюдения), удовлетворяющей условиям $t(\varepsilon) \to \infty$ и $t(\varepsilon) = o(|\log(\varepsilon)|)$ при $\varepsilon \to 0$, выполняется соотношение:

$$h_\mu(X,T) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{t(\varepsilon)} \log\left(\frac{\mu\left(O_\varepsilon\left(T^{t(\varepsilon)}\left(O_\varepsilon\left(x\right)\right)\right)\right)}{\mu\left(O_\varepsilon\left(x\right)\right)}\right),$$

где $h_\mu(X,T)$ — энтропия, отвечающая мере $\mu$, $O_\varepsilon(x)$ — шар радиуса $\varepsilon$ с центром $x \in X$. Выражение под знаком предела характеризует величину деформации границы шара $O_\varepsilon(x)$ за время наблюдения, а сходимость можно понимать по-разному: почти всюду, в среднем, по мере и т.п. В [2] это утверждение доказано для сдвигов Маркова и сходимости в среднем. В дальнейшем оно было обобщено на другие символические системы и некоторые гладкие, причем для вторых удалось доказать сходимость почти всюду (как и предполагалось в [1]), а для первых — лишь сходимость в среднем. Долгое время оставалось неясным, является ли эта особенность фундаментальной (т.е. сходимости почти всюду в этом случае нет) или же сходимость почти всюду есть, но её просто не удается доказать.

Данный доклад посвящен символическим системам. Наиболее сильный известный результат в этом направлении — обобщение обсуждаемого утверждения на широкий класс синхронизованных символических систем (включающий в себя все марковские и софические системы), полученное С.А. Комечем в [3]. В докладе этот результат будет обобщен на символические системы с синхронизированным подсдвигом полной меры. Будет также показано, что и это не самая общая ситуация, когда он верен. Кроме того, будет продемонстрировано, что в символическом случае сходимости почти всюду действительно, вообще говоря, нет, что дает ответ на сформулированный выше вопрос.

## Источники и литература

1) Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. Москва: Наука, 1984.
2) Gurevich B.M. Geometric interpretation of entropy for random processes // AMS Transl., 1996, V. 171, Pp. 81–87.
3) Комеч С. А. Скорость искажения границы в синхронизованных системах: геометрический смысл энтропии // Пробл. передачи информ., 2012, том 48, выпуск 1, С. 15–25.