Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об инвариантных поверхностях в моделях кольцевых генных сетей

Научный руководитель – Голубятников Владимир Петрович

Кириллова Наталья Евгеньевна
Аспирант
Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: n.kirillova@g.nsu.ru

Рассматривается динамическая система следующего вида:

$$\frac{dm_j}{dt} = -k_j m_j + f_j(p_{j-1});\ \ \frac{dp_j}{dt} = \mu_j m_j - \nu_j p_j;\ \ j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $f_j(p_{j-1})$ — гладкие монотонно убывающие функции неотрицательного аргумента, p_j и m_j — концентрации некоторых белков и соответствующих им мРНК, а μ_j, ν_j и k_j — положительные постоянные, характеризующие скорость синтеза этих белков и мРНК. Здесь, если $j = 1$, то $j - 1 = n$, где $n = 3$.

Упрощённая версия такой системы была рассмотрена в [3] как модель функционирования одной генной сети. Ранее, см. [1], было показано, что параллелепипед $Q = \prod_{j=1}^{j=3}([0, A_j]\times[0, B_j])$ является инвариантной областью системы (1). Здесь $A_j := f_j(0)/k_j$ и $B_j := \mu_j A_j/\nu_j$, при этом система (1) имеет ровно одну стационарную точку S_0.

Разобьём инвариантный параллелепипед Q плоскостями, параллельными координатным плоскостям и проходящими через стационарную точку $S_0 = (m_1^0, p_1^0, m_2^0, p_2^0, m_3^0, p_3^0)$, на 64 более мелких параллелепипедов, которые мы будем называть блоками и нумеровать бинарными мультииндексами:

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\} =$$
$$\left\{\mathbf{X} \in Q \mid m_1 \gtrless_{\varepsilon_1} m_1^0;\ p_1 \gtrless_{\varepsilon_2} p_1^0;\ \dots; m_3 \gtrless_{\varepsilon_5} m_3^0;\ p_3 \gtrless_{\varepsilon_6} p_3^0\right\},$$

где $\mathbf{X} = (m_1, p_1, m_2, p_2, m_3, p_3)$, $\quad \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3,\, \varepsilon_4,\, \varepsilon_5,\, \varepsilon_6 \in \{0, 1\}$, и отношения порядка задаются следующим образом: символ $\gtrless_0$ соответствует $\leq$, а символ $\gtrless_1$ соответствует $\geq$. Для блоков валентности один построена диаграмма переходов, см. [2]. Валентность один означает, что из каждого блока траектории могут переходить только в один соседний блок. Обозначим через Ω_1 объединение таких блоков.

Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ — собственные числа матрицы линеаризации M_6 системы (1), у которых $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 \neq 0$. Тогда этим собственным числам соответствует вещественная плоскость P_1^2, являющаяся инвариантным подпространством матрицы M_6.

Определение. *Стационарная точка динамической системы называется гиперболической, если собственные числа соответствующей матрицы линеаризации имеют положительные и отрицательные вещественные части, но не являются мнимыми.*

Лемма. *Если точка S_0 является гиперболической, то $U \cap P_1^2 \subset \Omega_1$, где U — окрестность точки S_0.*

Теорема. *Если S_0 — гиперболическая стационарная точка, то через неё проходит инвариантная поверхность, содержащая цикл C системы* (1).

Работа поддержана РФФИ, грант 20-31-90011.

Источники и литература

1) Аюпова Н.Б., Голубятников В.П., Казанцев М.В. О существовании цикла в одной несимметричной модели молекулярного репрессилятора // Сибирский журнал вычислительной математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 121–129.
2) Кириллова Н.Е., Минушкина Л.С. О дискретизации фазовых портретов динамических систем // Известия АлтГУ. 2019. Т. 108, № 4. С. 82–85.
3) Elowitz M.B., Leibler S. A Synthetic Oscillatory Network of Transcriptional Regulators // Nature. 2000. V. 403, P. 335–338.