Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Существование вполне неустойчивой дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью

Научный руководитель – Сергеев Игорь Николаевич

Бондарев Алексей Андреевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: albondarev1998@yandex.ru

Настоящий доклад посвящён недавно введённому [3] понятию качественной теории дифференциальных уравнений, а именно, *устойчивости по Перрону*. Он продолжает цикл работ автора [1] и [2], усиливая их результаты. Первая из этих работ исправляла недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 [4], однако построенная в ней дифференциальная система обладала ненулевым (хотя и *ограниченным* на всей полуоси времени) линейным приближением в нуле. Во второй работе построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением в нуле.

Нижеследующее усиление перечисленных результатов состоит в построении системы, обладающей как *перроновской*, так и *верхнепредельной полной неустойчивостью* (а значит, и *ляпуновской глобальной неустойчивостью*) и одновременно с этим не просто частной (как это было во всех примерах, рассмотренных выше), а даже *массивной частной устойчивостью.*

Для числа $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ рассматриваем системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

а значит, допускают *нулевое* решение.

Теорема. При $n = 2$ существует система (1), удовлетворяющая условиям (2) и обладающая следующими тремя свойствами:

• правая часть системы (1) бесконечно дифференцируема и

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

• для каждого решения x системы (1), удовлетворяющего начальным условиям $|x(0)| < 1$ или $x(0) = (1,0)^{\mathsf{T}}$, а также $|x(0)| = 1$ и $x_2(0) > 0$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty;$$

• для всех остальных решений x системы (1), удовлетворяющих начальным условиям $|x(0)| > 1$ или $x(0) = (-1,0)^{\mathsf{T}}$, а также $|x(0)| = 1$ и $x_2(0) < 0$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0.$$

Таким образом, при $t \to +\infty$ все близкие к нулю ненулевые решения описанной системы стремятся по норме к бесконечности, а все остальные — к нулю. Заметим, что полученный результат не распространяется на *автономные* системы, для которых полная и глобальная неустойчивости сразу всех перечисленных типов (и перроновского, и верхнепредельного, и ляпуновского), согласно теореме 6 из работы [4], *неразличимы*.

Источники и литература

1) Бондарев А.А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. 899.
2) Бондарев А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. В печати.
3) Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 6. 855–856.
4) Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. 636–646.