Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

# Равномерная резольвентная сходимость для эллиптических операторов в областях, перфорированных вдоль заданного многообразия

**Научный руководитель – Борисов Денис Иванович**

***Мухаметрахимова Альбина Ишбулдовна***

*Аспирант*

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия

*E-mail: albina8558@yandex.ru*

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с границей класса $C^2$, $S \subset \Omega$ – многообразие без края класса $C^2$ коразмерности 1, $\varepsilon$ – малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – функция, удовлетворяющая неравенству: $0 < \eta(\varepsilon) \leqslant 1$. Обозначим через $\mathbb{M}^\varepsilon \subseteq N$ некоторое произвольное множество. В окрестности $S$ выберем точки $M_k^\varepsilon$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ такие, что $dist(M_k^\varepsilon, S) \leqslant R_0\varepsilon$, где $R_0 > 0$ – константа, не зависящая от $k$ и $\varepsilon$. Пусть $\omega_{k,\eta} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ – ограниченные области с границами класса $C^2$. Положим: $\omega_k^\varepsilon := \{x : (x - M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1} \in \omega_{k,\eta}\}$, $\theta^\varepsilon := \bigcup\limits_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} \omega_k^\varepsilon$, $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus \theta^\varepsilon$.

В области $\Omega$ зададим функции $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_i = A_i(x)$, $A_0 = A_0(x)$, удовлетворяющие условиям: $A_{ij}, A_i \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_0 \in L_\infty(\Omega)$, $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$, $\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c_0|\xi|^2$, $x \in \Omega$, $\xi = (\xi_1 \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, где $c_0 > 0$ – константа, не зависящая от $x$ и $\xi$. Через $a = a(x, u)$ обозначим функцию, удовлетворяющую условиям: $|a(x, u_1) - a(x, u_2)| \leqslant a_0|u_1 - u_2|$, $a(x, 0) = 0$, где $a_0$ – константа, не зависящая от $x$, $u_1$ и $u_2$.

Рассматривается краевая задача:

$$\left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0 - \lambda\right) u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} + a(\cdot, u_\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta^\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{n}} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \cos(\nu, Ox_i) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $f \in L_2(\Omega)$, $\lambda$ – вещественное число, $\cos(\nu, Ox_i)$ – косинус угла между осью $Ox_i$ и единичной нормалью $\nu$ к $\partial\theta^\varepsilon$, направленной внутрь множества $\theta^\varepsilon$.

Введем еще одну краевую задачу:

$$\left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0 - \lambda\right) u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Наш основной результат утверждает, что при некоторых дополнительных предположениях относительно многообразия $S$ и отверстий $\omega_k^\varepsilon$ и выполнении одного из следующих условий: 1) $a \equiv 0$ или 2) $\eta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ выполнены неравенства

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C(\varepsilon\eta + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{n}{2}})\|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \text{если выполнено условие 1,}$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C(\varepsilon\eta + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{n}{2}} + \eta^{n-1})\|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{если выполнено условие 2.}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).