Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Существование оптимальных стационарных состояний в динамике распределённых популяций с импульсной эксплуатацией

Научный руководитель – Давыдов Алексей Александрович

Мельник Джамиля Артуровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: dzhamilya.saidzhanova@gmail.com

Мы рассматриваем распределенную на окружности эксплуатируемую популяцию, динамика которой доставляется уравнением (см., например, [3], [4], [6])

$$\dot{p} = (\alpha(x)p_x)_x + a(x)p - b(x)p^2 \tag{1}$$

где t - время, x - точка окружности, $p = p(t, x)$ - это плотность популяции в точке x в момент времени t, а функция α, $\alpha = \alpha(x)$, характеризует диффузию популяции в точке x в момент времени t. Будем предполагать, что функции a, b, и α непрерывны и имеют производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с некоторым положительным показателем, а функции α и b к тому же положительны. Такие условия на эти коэффициенты наложены, например, в [4]. Прототипом периодической среды здесь - окружности, - может служить любой периодический процесс, параметризованный некоторым монотонным параметром прохода по этому циклу (см., например, [1], [2], [5]).

Эксплуатация популяции происходит путем отбора одной и той же *доли* q, $q = q(x)$, $0 \le q \le 1$, с некоторым периодом $T > 0$. Задача - получить от эксплуатации популяции максимальный средний временной доход в натуральном виде на бесконечном горизонте, то есть максимизировать

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \sum_{k=1}^{n} \int_{S^1} p(kT-, x)q(x)dx \tag{2}$$

путем выбора подходящей доли отбора q.

Теорема 1. *При заданных доле отбора и периоде сбора $T > 0$ существует T-периодическая динамика плотности популяции, доставляющая максимум функционала (2) среди периодических динамик при этой доле отбора.*

Теорема 2. *При заданном периоде отбора $T > 0$ существует доля отбора q, $0 \le q \le 1$, и T-периодическая динамика плотности популяции при этой доле, доставляющие максимум функционала (2) среди всех T-периодических динамик плотности популяции (по всем долям отбора).*

Результаты переносятся и на случай нестационарных T- периодических коэффициентов уравнения (1).

Источники и литература

1) В.И.Арнольд, Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его приложения. 2002. Т.~36, вып.~2. С.~1–11.
2) А. О. Беляков, А. А. Давыдов, Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса, Тр. ИММ УрО РАН, 22, № 2, 2016, 38–46

3) А.Н.Колмогоров, И.Г.Петровский, Н.С.Пискунов, Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме// Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика, 1:6 (1937), 1-16.
4) H. Berestycki, F. Hamel and L. Roques. Analysis of the periodically fragmented environment model: I - Influence of periodic heterogeneous environment on species persistence // Journal of mathematical biology, 2005, pp.75.
5) A.O.Belyakov, A.A.Davydov, V.M.Veliov, Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P.$\sim$475–494.
6) P. Hess. Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity//Pitman Research Notes in Mathematics Series. 1991, Vol. 155, 1-139