Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Задача восстановления начального состояния осциллирующей цепи по неполным наблюдениям

Научный руководитель – Куржанский Александр Борисович

Абрамова Варвара Владимировна

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

E-mail: ruvasha@yandex.ru

Представляемая работа посвящена решению задачи наблюдения на ограниченном временном отрезке для осциллирующей цепи, состоящий из последовательно соединенных пружин и грузов. Наблюдается один из грузов цепи, в качестве доступной информации выступает координата данного груза x_i на отрезке $[t_0, t_1]$. В системе не учитываются влияния силы тяжести и сопротивления воздуха, концы цепи зафиксированы.

Предполагаются известными все параметры системы: количество грузов в цепи n, веса грузов $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, и коэффициенты жесткости пружин $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, n, k_{n+1} \geqslant 0$. Наблюдаемая физическая система может быть описана системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка, где за $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, взяты смещения центров масс грузов относительно их положений равновесия, а $x_{i+n}(t) = \dot{x}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, обозначают скорости их изменения:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{n+i}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) = \frac{1}{m_1}(k_2(x_2(t) - x_1(t)) - k_1 x_1(t)) \\ \dot{x}_{n+j}(t) = \frac{1}{m_j}(k_{j+1}(x_{j+1}(t) - x_j(t)) - k_j(x_j(t) - x_{j-1}(t))) \\ \dot{x}_{2n} = \frac{1}{m_n}(-k_{n+1}x_n(t) - k_n(x_n(t) - x_{n-1}(t))) \end{cases} =$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [t_0, t_1]; i = 1, \ldots, n, j = 2, \ldots, n-1. \quad (1)$$

В качестве наблюдения рассматривается линейное преобразование вектора фазовых координат $y(t) = Gx(t) = x_j(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ где j – номер наблюдаемого груза. В ходе исследования были рассмотрены условия разрешимости данной задачи, в частности доказано достаточное условие наблюдаемости: наличие полной информации о позиции (но не о скорости) одного из крайних грузов системы. Представленный метод решения может быть также применен и к другим задачам со сходной постановкой и физической природой.

Задача нахождения начального распределения данных $x(t_0)$, по результатам наблюдения за одним из грузов цепи, порождает двойственную задачу управления [1], которая в данной работе не решалась напрямую. Связь между решениями задач управления и наблюдения описывает *проблема моментов*:

$$\int_{t_0}^{t_1} u(t) \cdot y(t) dt = \langle c, x(t_0) \rangle, \quad c \in \mathbb{R}^{2n}, u(t) \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $u(t)$ – управление в двойственной задаче, для которой произвольный вектор c задает начальное условие в момент времени t_0. Сама двойственная задача управления имеет вид:

$$\dot{z}(t) = -A^T z(t) - G^T u(t), \quad z(t_0) = c, z(t_1) = \bar{\theta}, \tag{3}$$

то есть представляет собой задачу перевода системы из точки в точку. При рассмотрении в качестве допустимых управлений ограниченных функций из класса кусочно непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$, таким образом делается переход к корректной задаче оптимального управления с вырожденной матрицей G^T при управлении. Последнее условие осложняет применение классических методов для решения данной задачи. Предложенный метод основывается на использовании внутренних эллипсоидальных оценок, с помощью которых можно найти специальные векторы $c_i, i = 1, \ldots, 2n$, и соответствующие им оптимальные управления $u_i(t)$, являющиеся решениями семейства задач вида (3). Последние две сущности позволяют с использованием реализации наблюдения, согласно (2), составить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), из которых и находится искомый вектор начальных данных для исходной системы (1). Было показано, что для решения поставленной задачи требуется в точности $2n$ эллипсоидальных оценок, которые в совокупности также могут быть использованы для аппроксимации множества разрешимости управляемой системы (3) [2]. Целесообразность данного подхода обосновывается тем, что применяемые оценки являются тугими, то есть касающимися приближаемого множества, и они позволяют в явном виде отыскать оптимальное управление.

О реализации численного метода. Так как доступная информация о динамике системы представляет собой лишь смещение одного из грузов, получаемые в ходе решения внутренние оценки могут вырождаться. Поэтому применяется регуляризация, схожая с предложенной в [3]. Кроме того, в программной реализации учитывается, что получаемая СЛАУ будет возмущенной и потребует видоизменения, чтобы повысить точность получаемого решения. В ходе исследования было показано, что нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически. Поэтому, имея начальные данные с малым отклонением от настоящих, выпущенная из первых траектория будет близка к наблюдаемой, и полученное решение далее можно использовать в прикладных целях.

Иллюстрации. На одной из иллюстраций представлена проекция множества разрешимости двойственной управляемой системы, на другой изображены траектории смещений семимерной системы, выпущенные из точных (зеленый цвет) и восстановленных по наблюдению за последним грузом (красный цвет, почти не видно из-за близости траекторий) начальных данных.

Источники и литература

1) Куржанский А. Б. Избранные труды А. Б. Куржанского. М. : Издательство Московского университета, 2009. 755 с.

2) Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. Birkhäuser Basel, 2014. 445 с.

3) Гагаринов П. В. Вычисление проекций трубок достижимости линейных управляемых систем на основе методов эллипсоидального исчисления // Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2007. № 1. С. 14-24

Иллюстрации

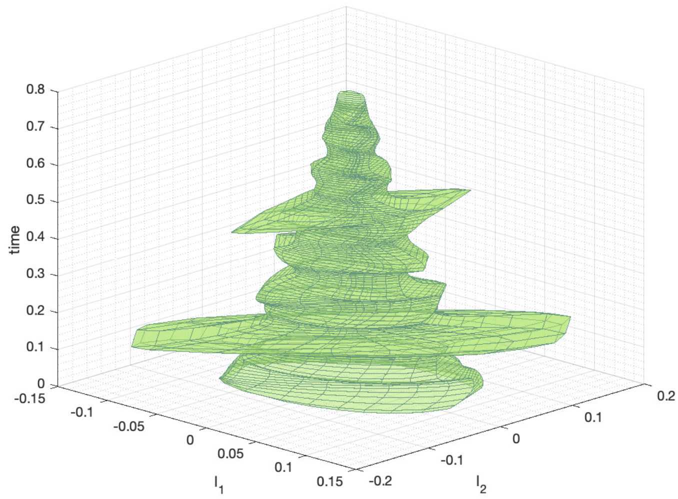

Рис. 1. Множество разрешимости для двойственной задачи

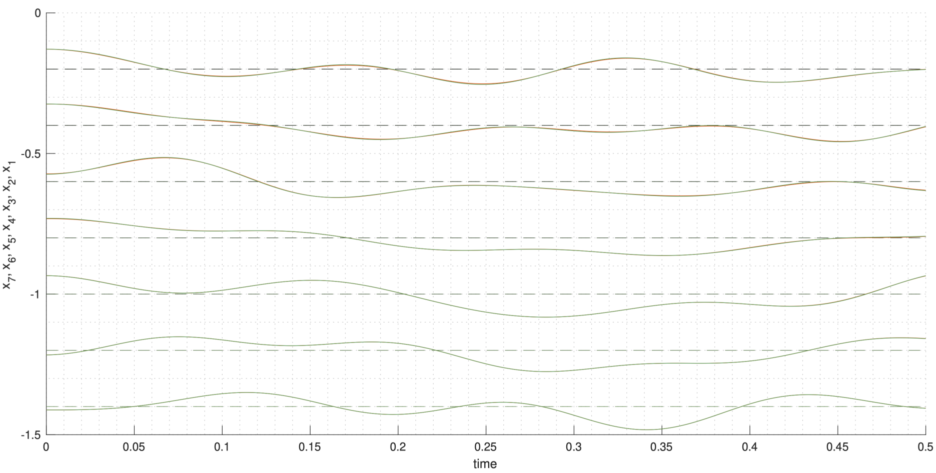

Рис. 2. Траектории системы, настоящие и выпущенные из восстановленных начальных условий