Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Задача Римана для уравнений динамики холодной плазмы

Научный руководитель – Розанова Ольга Сергеевна

Капридова Дарья Алексеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: kapr.das@yandex.ru

Одной из простейших моделей, описывающих поведение одномерного течения холодной плазмы, является гиперболическая система двух уравнений

$$v_t + vv_x = -E, \quad E_t + vE_x = u, \tag{1}$$

где $(v, E) = (v(t,x), E(t,x)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Плотность $n(t,x) > 0$ при этом находится из условия $n = 1 - E_x$ (например, [1]). Для системы (1) ставится задача Коши

$$(v, E)|_{t=0} = (v_0(x), E_0(x)), \tag{2}$$

как правило, с C^1 - гладкими функциями в качестве начальных данных. Тем не менее, известно, что со временем производные решения такой задачи Коши могут обращаться в бесконечность в течение конечного времени, что соответствует образованию ударной волны [3].

Поэтому есть смысл рассмотреть в качестве начальных данных (2) кусочно-гладкие функции, простейшим примером которых являются начальные данные Римана

$$(v, E)|_{t=0} = (v_- + [v]\Theta(x), E_- + [E]\Theta(x)), \tag{3}$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, константы (v_-, E_-) – значения слева от скачка, $([v], [E])$ – величины скачков, $(v_+ = v_- + [v], E_+ = E_- + [E])$ – значения справа от разрыва. Отметим, что для того, чтобы обеспечить положительность плотности, приходится накладывать условие $[E] \leq 0$. Эта задача является весьма нетривиальной, потому что для построения положения разрыва приходится записывать систему (1) в дивергентной форме

$$n_t + (vn)_x = 0, \quad (n(u^2 + E^2))_t + (nu(u^2 + E^2))_x = 0, \tag{4}$$

соответствующей законам сохранения массы и полной энергии. Однако для этого приходится привлекать функцию плотности, которая на сильном разрыве содержит сильную (дельтаобразную) сингулярность, и условия Ранкина-Гюгонио не могут быть записаны в традиционной форме [2].

В настоящей работе рассматривается подкласс решений системы (1), соответствующий на гладких решениях условию $u^2 + E^2 = C^2$ с заданной константой C. В этом случае (1) сводится к одному уравнению

$$v_t + vv_x = -\sigma\sqrt{C^2 - v^2}, \quad \sigma = \pm 1, \tag{5}$$

а в начальных условиях (3) E_- и E_+ выражаются как $E_- = \pm\sqrt{C^2 - u_-^2}$, $E_+ = \pm\sqrt{C^2 - u_+^2}$, так, чтобы обеспечить условие $[E] \leq 0$.

Задача Римана для уравнения (5) строится без привлечения законов сохранения (4), которые оказываются выполненными автоматически. Проведен полный анализ характеристической плоскости. Показано, что положения слева и справа от волн Римана являются периодическими по времени функциями, волны разрежения и допустимые ударные волны периодически по времени чередуются, найдено положение ударной волны.