Критерии высотности атома

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Трифонова Виктория Александровна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: trifonovaviktoriya2012@yandex.ru

Пусть M^2 — гладкое замкнутое двумерное многообразие, $f : M^2 \to \mathbb{R}$ — функция Морса на M^2 и $f^{-1}(k) = \{x \in M^2 \colon f(x) = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, — ее связный критический уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ не содержит критических точек, кроме лежащих на критическом уровне $f^{-1}(k)$.

Определение 1. *Атомом* называется поверхность $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ с заданной на ней функцией Морса f. Два атома называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм поверхностей (сохраняющий ориентацию, если поверхность ориентирована), который связные компоненты линий уровня первой функции переводит в связные компоненты линий уровня второй функции.

Второе эквивалентное определение атома как «оснащённой» пары см. в [1].

Определение 2. Назовем атом, порожденный функцией f, *высотным*, если существует такое вложение $i \colon f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]) \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(i(p))$ для каждой точки $p \in f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z — функция высоты на $i(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]))$.

Седловой ориентированный атом может быть определен также как f-граф (см. [2]), что в свою очередь позволяет работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение 3. Конечный связный граф G, некоторые ребра которого ориентированы, называется *f-графом*, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра-петли. Подробнее о построении f-графа по атому и его свойствах см. в [1–4]. Легко показать, что ориентированные ребра f-графа образуют непустое множество ориентированных циклов.

Определение 4. f-Граф G назовем *f-гомеоморфным* f-графу H, если существует конечная цепочка преобразований $G = G_1 \to \ldots \to \mathrm{G}_n = H$, композиция которых преобразует G в H и каждое из которых относится к одному из следующих видов:

1) изоморфизм f-графов;

2) вставка ориентированного цикла в середину неориентированного ребра f-графа;

3) обратное преобразование к преобразованию 2.

Теорема 1 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома [4]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$ (см. рис. 1).*

Утверждение (В.А. Трифонова, минимальность списка препятствий V и $V(r), r \geq 1$). *Препятствие V и серия препятствий $V(r), r \geq 1$, образуют минимальное (по включению) множество препятствий, для которого выполнено свойство из теоремы 1.*

Теорема 2 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома [4]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит подграфа, гомеоморфного* *полному двудольному графу $K_{3,3}$, и не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V.*

Исследование выполнено при поддержке фонда «БАЗИС».

Источники и литература

1) *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
2) *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Матем. ин-та РАН. 1994. **205**. 131–140.
3) *Трифонова В.А.* Высотные частично симметричные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 2. 33–41.
4) *Трифонова В.А.* Критерии высотности атома // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 3. 12–24.

Иллюстрации

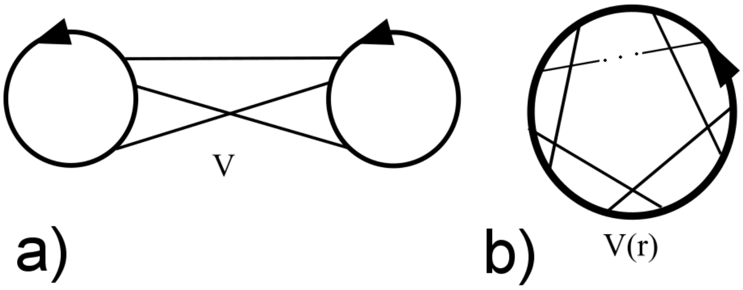

Рис. 1. Препятствия V и $V(r)$