Секция «Геометрия и топология»

Реализация топологических инвариантов интегрируемыми биллиардными книжками

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Харчева Ирина Сергеевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: irina_harcheva@mail.ru

Рассмотрим произвольную компактную область Ω в плоскости с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется внутри этой области Ω по прямой с постоянной скоростью и отражается о гладкую часть границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. Тогда *биллиардом в области* Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки. Эта динамика задает гамильтонову систему на кокасательном расслоении к области Ω. У биллиарда есть один первый интеграл – гамильтониан, равный половине квадрата модуля вектора скорости. Значит, биллиард является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы. Из теории гамильтоновых систем следует, что для ее интегрируемости необходим еще один первый интеграл.

Важным классом интегрируемых биллиардов является биллиард в области Ω, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол, или *элементарный биллиард*. Оказывается, в таком биллиарде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к каустике — фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется еще один интеграл Λ, независимый с предыдущим, — параметр каустики, и система будет интегрируемой по Лиувиллю.

Биллиардная книжка — это обобщение биллиарда, полученное склейкой нескольких элементарных биллиардов вдоль их границ. Первые интегралы на элементарном биллиарде порождают первые интегралы на биллиардной книжке. Таким образом, можно показать, что биллиардная книжка также является системой, интегрируемой по Лиувиллю, но в отличие от элементарного биллиарда, динамика биллиардной книжки устроена сложнее.

Для динамических систем, интегрируемых по Лиувиллю, определены топологические инварианты Фоменко-Цишанга: атомы, f-графы, грубые и меченые молекулы (см. [1]). Они позволяют выявлять лиувиллеву эквивалентность таких систем.

На докладе будет рассматриваться вопрос о реализации биллиардными книжками систем, интегрируемых по Лиувиллю, в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга. Будет предъявлен алгоритм реализации произвольной бифуркации в терминах 3-атомов (см. [2]) или, их эквивалентов, f-графов. Кроме того, этот алгоритм расширяется до алгоритма реализации произвольной грубой молекулы.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (№17-11-01303) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Источники и литература

1) Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко - том 1. Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.

2) Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем / В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева - Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56.