Секция «Геометрия и топология»

Новые случаи интегрируемости в динамике твердого тела: обзор и перспективы

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Кобцев Иван Федорович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: int396.kobtsev@mail.ru

Рассмотрим задачу о движении твердого тела, закрепленного в одной точке, под действием потенциальных и гироскопических сил. Пусть J — тензор инерции тела относительно точки закрепления, $OXYZ$ — неподвижная система отсчета, $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ — подвижная (вмороженная в тело) система отсчета. Не ограничивая общности, будем считать ее оси совпадающими с главными направлениями J (и тогда J есть диагональная матрица с элементами A, B, C).

Далее, пусть $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ — угловая скорость тела, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор, задающий направление вертикали (сонаправленный с OZ), $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\gamma})$ — вектор гироскопических сил, $V = V(\boldsymbol{\gamma})$ — потенциал внешних сил.

Уравнения движения рассматриваемой системы, записанные в $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, имеют вид

$$\begin{aligned} J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\mu}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \langle \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\gamma} \rangle - \left\langle \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Lambda}$ — кинетический момент тела.

Эти уравнения движения в общем случае неинтегрируемы, однако существует достаточно широкий набор параметров, при которых заданная таким образом система становится интегрируемой. Такие наборы параметров называются случаями интегрируемости и в подавляющем большинстве случаев известны давно, но и в последние годы выявлено много случаев, допускающих интегрирование.

Эта система всегда имеет три интеграла движения:
$H = \dfrac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega} \rangle + V$ — полная энергия,
$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ — геометрический интеграл,
$G = \dfrac{1}{2} \langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$ — интеграл площадей.

Для полной интегрируемости требуется еще один интеграл, функционально независимый с имеющимися.

Положим $A = B = 4C$, $\boldsymbol{\Lambda} = (-4\nu\gamma_1, -4\nu\gamma_2, -\nu\gamma_3 + k)$, $H = \dfrac{1}{2}(4p^2 + 4q^2 + r^2) + V$, где $V = \left(a\gamma_1 + b\gamma_2 + \nu k\gamma_3 + \dfrac{3\nu^2}{2}\gamma_3^2 + \dfrac{\lambda}{\gamma_3^2}\right)$. Тогда, как показано в (1), на $M^4 = \{\Gamma = 1, G = 0\}$ существует дополнительный интеграл

$$K = (r - \nu\gamma_3 - k) \left((p - \nu\gamma_1)^2 + ((q - \nu\gamma_2)^2 + \frac{\lambda}{2\gamma_3^2} \right) - \gamma_3 \big(ap + bq - \nu\,(a\gamma_1 + b\gamma_2)\big).$$

Следовательно, на указанном уровне система вполне интегрируема.

Этот случай включает в себя уже известные ранее случаи Горячева-Чаплыгина ($\boldsymbol{\mu} = 0$, $V = a\gamma_1 + \dfrac{\lambda}{\gamma_3^2}$) и Сретенского ($\boldsymbol{\mu} = (0,\, 0,\, k)$, $V = a\gamma_1$).

Вторая система, найденная в (2) и обобщающая классический случай Лагранжа, получается, если положить $A = B$, $V = a_3\gamma_3 + \dfrac{b_1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \dfrac{b_3}{2}\gamma_3^2$, $\boldsymbol{\Lambda} = (K_1\gamma_1,\, K_1\gamma_2,\, K_3\gamma_3 + \kappa)$. В отличие от предыдущего случая, здесь дополнительный интеграл $F = Cr + K_3\gamma_3 + \kappa$ существует при любом значении интеграла площадей.

В данной работе найдены изоэнергетические многообразия $Q_h^3 = \{\Gamma = 1,\, G = 0,\, H = h\}$ для обеих систем. Это является важным шагом на пути к построению инвариантов Фоменко-Цишанга этих систем (3).

Источники и литература

1) Yehia H. M. *On a generalization of certain results of Goriatchev, Chaplygin and Sretensky in the dynamics of rigid bodies* (*J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 1996, pp. 8159–8161)
2) Yehia H. M *Rigid body dynamics: a Lagrangian approach with a full survey of integrable problems*: *Springer*, 2021
3) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы*: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.