Секция «Геометрия и топология»

Связь калибровочных пространств с коническими метриками

Научный руководитель – Фоменко Татьяна Николаевна

Захарян Юрий Норикович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра общей топологии и геометрии, Москва, Россия
E-mail: yuri.zakharyan@gmail.com

Обобщением понятия метрического пространства является калибровочное пространство.

Определение 1. Пусть X, A – непустые множества. Пусть $D = \{d_a : X \times X \to [0; +\infty)\}_{a \in A}$ – разделяющее семейство числовых псевдометрик, т.е. каждое отображение d_a удовлетворяет свойствам:

$$\begin{aligned} &d_a(x,x) = 0,\ \forall x \in X; \\ &d_a(x,y) = d_a(y,x),\ \forall x,y \in X; \\ &d_a(x,z) \le d_a(x,y) + d_a(y,z),\ \forall x,y,z \in X. \end{aligned}$$

Кроме того, $d_a(x,y) = 0,\ \forall a \in A \ \Rightarrow \ x = y$ для любых $x, y \in X$.

Калибровочным пространством называют пространство X, топология которого задается с помощью предбазы:

$$S = \{B_a(x,r) \mid a \in A, x \in X, r > 0\},\ B_a(x,r) := \{y \in X \mid d_a(x,y) < r\}.$$

В 1934 году появилось понятие метрики, со значениями в упорядоченных нормированных пространствах [1]. В 2007 году было введено понятие конической метрики и конического метрического пространства [2]. В работе [3] автором для произвольного калибровочного пространства показано следующее.

Пусть (X, D), $D = \{d_a\}_{a \in A}$, – калибровочное пространство. Рассмотрим топологическое векторное пространство $\mathbb{R}^A$, заданное в тихоновской топологии (линейные операции задаются покомпонентно). Тогда $C = [0, +\infty)^A$ – замкнутый собственный конус, т.е.

1) C – замкнуто, $C \neq \varnothing$, $C \neq \{0\}$.
2) $\alpha c + \beta c' \in C$, для любых $c, c' \in C$ и $\alpha, \beta \ge 0$.
3) $C \cap (-C) = \{0\}$.

Тогда на $\mathbb{R}^A$ можно рассмотреть порядок $c \le c' \ \Leftrightarrow \ c - c' \in C$.

Это позволяет определить: $d : X \times X \to C$, $d(x,y) = (d_a(x,y))_{a \in A}$. Доказана следующая теорема

Теорема 1.

1) d *– коническая метрика.*
2) d *непрерывна по каждой переменной.*
3) $x_n \to x \ \Leftrightarrow \ d(x_n, x) \to 0$, *для любой последовательности* $\{x_n\} \subset X$.

Список литературы

[1] D. R. Kurepa, *Tableaux ramifi es d'ensembles. Espaces pseudo-distancies*, C.r. Acad. sci. Paris. **198** (1934), 1563–1565.

[2] L. G. Huang, X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **332** (2007), 1468–1476.

[3] Yu. N. Zakharyan, *Search for vector-function zeros in gauge spaces*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis (в печати).