Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вейвлет-коэффициенты процесса Леви

Научный руководитель – Кожевникова Ирина Аркадьевна

Адильбаев Руслан

Студент (специалист)

Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова, Кафедра математики и информатики, Астана, Казахстан

E-mail: radilbaev@gmail.com

[a4paper]article inputenc, amssymb, amsmath [russian]babel [shortcuts,cyremdash]extdash amsmath amsthm mathrsfs

DefОпределение ThТеорема LemЛемма

Основная цель данной статьи - изучить вейвлет-преобразование процессов Леви, используя вейвлеты с компактным носителем. Для полученных вейвлет-коэффициентов изучены их основные свойства. Рассмотрен частный случай применения вейвлетов Хаара к сумме броуновского движения и сложного Пуассоновского процесса с ограниченным числом скачков.

The main object of the article is to study the wavelet decomposition of Levy processes by wavelets with compact support. Main properties of the wavelet coefficients is studied. The general result was applied to the interlacing process with finite different jumps by Haar wavelets.

1. Введение

Теория стохастических процессов является одной из динамично развивающихся теорий в математике в XX веке. Ее основы были положены А.Н. Колмогоровым ещё в 1930-м году. Процессы Леви впервые были исследованы Полом Леви в начале 1930-х годов.

Применение вейвлет-преобразования к процессам Леви было вполне естественным следствием после того, как были получены результаты вейвлет-преобразования Гауссовского и Пуассоновского процессов. Оценка вейвлет-коэффициентов процесса Леви составляет основную часть данного исследования и имеет теоретические и практические аспекты применения в большом количестве прикладных задач.

Многие ученые применяли вейвлет-преобразования для частного случая процесса Леви: Пуассоновского процесса или Гауссовского процесса и получили определенные результаты. Идея данной статьи получить общую форму вейвлет-коэффициента процесса Леви.

2. Основы и определения

2.1. Процессы Леви

Для того чтобы осознать природу процессов Леви начнем с его строгого определения:

Случайный процесс $X_t = (X_t)_{t\geq 0}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и принимающий значения в $\mathbb{R}$ называется процессом Леви, если

1) $X_0 = 0$ ($\mathbb{P}$ - п.н.),
2) $\forall n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ следует, что $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ являются независимыми в совокупности,
3) $\forall t, h \geq 0$ следует, что $X_{t+h} - X_h \stackrel{d}{=} X_t - X_0$ - имеет стационарные приращения,
4) X_t - стохастически непрерывный, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ и $t \geq 0$

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0.$$

Введем понятие стохастически эквивалентных случайных процессов.

Случайные процессы X_t и X'_t заданные на одном и том же множестве T и на одном том же вероятном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называются стохастически эквивалентными, если $X_t = X'_t$ (п.н.) $\forall t \in T$. Иногда X'_t называют модификацией X_t.

Воспользуемся следующей теоремой:

Пусть X_t - процесс Леви. Тогда существует модификация X'_t такая, что $X_t = X'_t$ (п.н.) и X'_t - cadlag-функция от t (непрерывная справа и имеет предел слева от фр. (continue à droite, limite à gauche)).

Для удобства здесь и далее мы будем считать, что имеем дело только с cadlag-модификацией процесса Леви.

Для того, чтобы понять структуру процесса Леви мы применим Фурье анализ. Характеристическая функция процесса Леви была полностью определена следующей теоремой:

Формула Леви-Хинчина. Если X_t - процесс Леви, то характеристическая функция процесса равна $\phi_t(\theta) = e^{t\eta(\theta)}$, для $\forall t \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$, где

$$\eta(\theta) = ia_0\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int\limits_{\mathbb{R}/\{0\}} (e^{i\theta y} - 1 - i\theta y \mathbb{I}_{|y|<1}(y))\nu(\mathrm{d}y), \tag{1}$$

для некоторых $a_0 \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ и борелевской меры ν на $\mathbb{R}/\{0\}$, для которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}/\{0\}} (|y|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}y) < \infty.$$

И наоборот, данному отображению (1) мы можем определить процесс Леви, для которого $\phi_t(\theta) = e^{t\eta(\theta)}$.

2.2. Вейвлеты

Вейвлеты - это функции типа маленькой волны (всплески), которые порождают базисы пространства $L^2(\mathbb{R})$, удобные для обработки сигналов. В начале 1980-х годов многие ученые уже использовали вейвлеты как альтернатива традиционному анализу Фурье. Одним из самых простых примеров подобного базиса - это базис Хаара.

Ортогональным кратномасштабным разложением (или анализом) пространства $L^2(\mathbb{R})$ называется последовательность замкнутых подпространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ обладающая свойствами:

1) $V_j \subset V_{j+1}$,
2) $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
3) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$,
4) Существует функция $\varphi(t) \in V_0$ называемая масштабирующей, такая что ее сдвиги $\varphi_{0,k}(t) = \varphi(t-k), k \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис пространства V_0.

Из свойств 3 и 4 следует, что функции $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}$ образуют ортонормированный базис пространства V_j.

Поскольку $V_j \subset V_{j+1}$, то в пространстве V_{j+1} имеется ортогональное дополнение W_j к пространству V_j:

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j.$$

Оказывается, что существует функция $\psi(t) \in W_0$ такая, что ее целочисленные сдвиги $\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортогональный базис пространства W_0. Методом математической индукции несложно доказать, что $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортогональный базис пространства W_j, где

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k). \tag{2}$$

Ортогональное дополнение W_j - называется пространством вейвлетов, а его элементы называются вейвлетами.

Заметим, что базис $\{\varphi_{0,k}(t), \psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ будет ортогональным базисом в $L^2(\mathbb{R})$. Следовательно, любая функция $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ может быть представлена в виде:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k}\psi_{j,k}(t). \tag{3}$$

Функция $\psi(t)$ имеет N нулевых моментов, если для любого $k = 0, 1, \ldots, N-1$ имеют место равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Здесь и далее мы будем рассматривать только те базисы, в которых масштабируемая функция и вейвлеты в некотором ортогональном кратномасштабном разложении имеют компактные носители, кусочно-непрерывны, имеют не более чем конечное число точек разрывов первого рода и образующий вейвлет имеет как минимум первый нулевой момент.