Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Сходимость к равновесию бесконечной трансляционно инвариантной системы частиц на прямой под действием слабо случайной внешней силы.

Научный руководитель – Малышев Вадим Александрович

Меликян М.В.[1], *Лыков А.А.*[2]

1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия, *E-mail: magaarm@list.ru*; 2 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия, *E-mail: alekslyk@yandex.ru*

Мы рассматриваем на вещественной прямой общую линейную систему из счетного числа точечных частиц $\{q_j(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, единичных масс. Обозначим $p_j(t)=\dot{q}_j(t)$ - импульсы рассматриваемых частиц. Далее: $q(t)=\{q_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $p(t)=\{p_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Вводим формальный гамильтониан: $H(q,p)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}p_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}}a(k-j)q_kq_j$, где функция $a(k)$ удовлетворяет трем условиям:

1. симметрия: $a(k)=a(-k)$;
2. ограниченность носителя, то есть: $\exists\, r\in\mathbb{N}:\ \forall\, k,\ |k|>r\ a(k)=0$;
3. $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$ верно, что $\omega^2(\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a(k)e^{ik\lambda}>0$. Эти условия гарантируют неотрицательность рассматриваемого гамильтониана для всех $q,\ p\in l_2(\mathbb{Z})$. Мы будем рассматривать нулевые начальные условия $q_k(0)=0,\ p_k(0)=0,\ k\in\mathbb{Z}$. Тогда движение системы описывается следующей системой ОДУ: $\ddot{q}_j=-\sum_k a(k-j)q_k+f(t)\delta_{j,n},\ j\in\mathbb{Z}$, где $f(t)$ - внешняя сила, действующая на частицу с номером n, $\delta_{j,n}$ - символ Кронекера. Обозначим V - линейный оператор над $\mathbb{Z}$, соответствующий $\{a(k)\}$, $A=\begin{pmatrix}0 & E\\ -V & 0\end{pmatrix}$. Введем вектор $\psi(t)=\begin{pmatrix}q(t)\\ p(t)\end{pmatrix}$. Тогда система перепишется в виде: $\dot{\psi}=A\psi+f(t)g, g=(0,e_n)^T,\ 0,e_n\in l_2(\mathbb{Z}),\ e_n(j)=\delta_{j,n}$. Рассмотрим случай, когда $f(t)$ - стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс с ортогональной мерой $Z(dx)$, спектральной мерой $\mu(dx)$, носитель которой отделим от спектра оператора A, и ковариационной функцией $B(s)$, то есть:

$$B(s)=\int_{\mathbb{R}}e^{isx}\mu(dx),\ f(s)=\int_{\mathbb{R}}e^{isx}Z(dx).$$

Теорема. Решение $\psi(t)$ системы представляется в виде суммы двух центрированных случайных процессов: $\psi(t)=\zeta(t)+\eta(t)$, причем компоненты $\eta(t)$ - стационарные в широком смысле процессы, а $\zeta(t)\to 0,\ t\to+\infty$, а именно: каждая компонента сходится почти наверное к нулю.

Следствие. Распределение векторного процесса $\psi(t)$ сходится покомпонетно по распределению при $t\to+\infty$ к компонентам случайного вектора $\eta(0)$.

Источники и литература

1) Лыков А.А., Малышев В.А., Музычка С.А. Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием // Теория вероятностей и ее применения. 2012. Том 57, Выпуск 4. С. 794-799.

2) Lykov A.A., Malyshev V.A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields 18. № 4. 2012. P. 721-729.

3) Lykov A.A., Malyshev V.A. Convergence to Gibbs Equilibrium - Unveiling the Mystery // Markov Processes and Related Fields 19. № 4. 2013. P. 643-666.