Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Конечная модель голосования со случайными возмущениями

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Тумояков Денис Петрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: denisa2341@mail.ru

Рассмотрим стохастическую модель с дискретным временем $t = 0, 1, 2, ...$, состоящую из N участников, занумерованных числами от 1 до N. Каждый участник в каждый момент времени "голосует за" или "голосует против" по правилу, определённому далее.
Общее состояние процесса обозначим вектором $\xi(t) \in \{0, 1\}^N$. В таких обозначениях если участник, стоящий на месте x, "голосует за", то $\xi_x(t) = 1$ (если "голосует против", то $\xi_x(t) = 0$). Зададим динамику $\xi(t)$ с помощью следующих требований:

1) Процесс $\xi(t)$ является марковским (см.[1,2]).
2) По определению считаем, что участники голосуют условно независимо, то есть:

$$\mathbf{P}(\xi(t+1) = \vec{\theta} | \xi(t) = \vec{\alpha}) = \prod_{x=1}^{N} \mathbf{P}(\xi_x(t+1) = \theta_x | \xi(t) = \vec{\alpha})$$

3) Правило голосования имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}(\xi_x(t+1) = 1 | \xi(t) = \vec{\alpha}) = (1 - \varepsilon_x) \cdot \frac{(\alpha_{x-1}(t) + \alpha_x(t) + \alpha_{x+1}(t))}{3} + \varepsilon_x \cdot \gamma_x$$

где $\varepsilon_x, \gamma_x \in (0, 1)$ - константы, определённые для $\forall x \in \{1, 2, ..., N\}$.

Стоит отметить, что слагаемое $\varepsilon_x \cdot \gamma_x$ отвечает за "случайное возмущение". Если взять $\varepsilon_x = 0, \quad \forall x \in \{1, 2, ..., N\}$, то получим хорошо известную модель голосования (см. [3]).

Основной целью исследования стал поиск явной формулы для $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\xi_x(t) = 1)$. В ходе работы было выяснено, что из-за сложной структуры матрицы переходных вероятностей для решения этого вопроса использование вида стационарного распределения процесса нереалистично. Тем не менее был получен следующий результат:
Пусть выполнено условие:

$$\gamma_x = \gamma = Const, \quad \forall x \in \{1, 2, ..., N\};$$

тогда выполняется:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\xi_x(t) = 1) = \gamma, \quad \forall x \in \{1, 2, ..., N\}$$

Кроме того, для случая $\varepsilon_x = \varepsilon = Const$ (при различных γ_x) было доказано существование предела, но этот предел в явном виде выразить не удалось, поскольку он имеет сложное строение.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Маните А.Д. за постановку задачи и внимание к работе.

Источники и литература

1) Карлин С., *Основы теории случайных процессов. М.: "Мир", 1971*
2) Ширяев А.Н., *Вероятность. М.: "МЦНМО", 2017*
3) Лиггетт Т.М. , *Марковские процессы с локальным взаимодействием. "М.: Мир" 1989*