

Порождение полной алгебры системой комплексных матриц

Научный руководитель – Маркова Ольга Викторовна

Новочадов Дмитрий Юрьевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: dnovochadov@yandex.ru

Рассмотрим полную алгебру M_n квадратных комплексных матриц порядка n со стандартным ассоциативным умножением. Алгеброй, порождённой множеством $S \subset M_n$, называется наименьшая подалгебра $\langle\langle S \rangle\rangle \leq M_n$, содержащая единичную матрицу и S . В частности, бывает важно знать, совпадает ли $\langle\langle S \rangle\rangle$ с полной алгеброй M_n . Одним из ранних результатов по данной тематике служит широко известная теорема Бёрнсайда о том, что это совпадение равносильно отсутствию в \mathbb{C}^n нетривиальных инвариантных подпространств относительно S .

Далее, в работах Лаффи [2–3] с помощью теоремы Бёрнсайда получен исчерпывающий ответ на этот вопрос для случаев, когда S содержит матрицу из одной жордановой клетки или же диагональную с различными элементами: тогда порождение полной алгебры равносильно сильной связности графа Бёрнсайда $G(S)$ [4] — простого орграфа без петель на n вершинах, в котором $i \rightarrow j \Leftrightarrow \exists A \in S$ с ненулевым элементом $(A)_{ij}$. Известно также несколько числовых алгоритмов [1, 5], которые по двум матрицам со специальными свойствами за конечное число операций над их элементами определяют, есть у них общее нетривиальное инвариантное подпространство или нет.

В докладе будет представлено непосредственное обобщение двух результатов Лаффи:

Теорема 1. Пусть S содержит циклическую (nonderogatory) жорданову матрицу, то есть такую, у которой геометрические кратности каждого из собственных значений равны 1. В таком случае $\langle\langle S \rangle\rangle = M_n \Leftrightarrow G(S)$ сильно связан. Напротив, для любой нециклической жордановой матрицы A существует содержащая A система S с сильно связным $G(S)$ и $\langle\langle S \rangle\rangle \neq M_n$.

Также будет рассказано о продвижениях в случае нильпотентной матрицы из двух жордановых клеток одинакового размера.

Докладчик благодарит своего научного руководителя доцента Ольгу Викторовну Маркову за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

Источники и литература

- 1) Альпин Ю.А., Икрамов Х.Д. Рациональные процедуры в задаче об общих инвариантных подпространствах двух матриц. // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2000. Т. 268. С. 9–23.
- 2) Laffey T.J. A Note on Matrix Subalgebras Containing a Full Jordan Block. // Linear Algebra Appl., 1981. Vol. 37. pp. 187–189.
- 3) Laffey T.J. A Structure Theorem for Some Matrix Algebras. // Linear Algebra Appl., 1992. Vol. 162–164. pp. 205–215.
- 4) Lawrence B. Burnside graphs, algebras generated by sets of matrices, and the Kippenhahn conjecture. // Linear and Multilinear Algebra, 2019. Vol. 67. pp. 51–69.

- 5) Tsatsomeros M. A criterion for the existence of common invariant subspaces of matrices.
// Linear Algebra Appl., 2001. Vol. 322. pp. 51–59.