

## Порождение полной алгебры системой комплексных матриц

Научный руководитель – Маркова Ольга Викторовна

*Новочадов Дмитрий Юрьевич*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия  
*E-mail: dnovochadov@yandex.ru*

Рассмотрим полную алгебру  $M_n$  квадратных комплексных матриц порядка  $n$  со стандартным ассоциативным умножением. Алгеброй, порождённой множеством  $S \subset M_n$ , называется наименьшая подалгебра  $\langle\langle S \rangle\rangle \leq M_n$ , содержащая единичную матрицу и  $S$ . В частности, бывает важно знать, совпадает ли  $\langle\langle S \rangle\rangle$  с полной алгеброй  $M_n$ . Одним из ранних результатов по данной тематике служит широко известная теорема Бёрнсайда о том, что это совпадение равносильно отсутствию в  $\mathbb{C}^n$  нетривиальных инвариантных подпространств относительно  $S$ .

Далее, в работах Лаффи [2–3] с помощью теоремы Бёрнсайда получен исчерпывающий ответ на этот вопрос для случаев, когда  $S$  содержит матрицу из одной жордановой клетки или же диагональную с различными элементами: тогда порождение полной алгебры равносильно сильной связности графа Бёрнсайда  $G(S)$  [4] — простого орграфа без петель на  $n$  вершинах, в котором  $i \rightarrow j \Leftrightarrow \exists A \in S$  с ненулевым элементом  $(A)_{ij}$ . Известно также несколько числовых алгоритмов [1, 5], которые по двум матрицам со специальными свойствами за конечное число операций над их элементами определяют, есть у них общее нетривиальное инвариантное подпространство или нет.

В докладе будет представлено непосредственное обобщение двух результатов Лаффи:

**Теорема 1.** Пусть  $S$  содержит циклическую (nonderogatory) жорданову матрицу, то есть такую, у которой геометрические кратности каждого из собственных значений равны 1. В таком случае  $\langle\langle S \rangle\rangle = M_n \Leftrightarrow G(S)$  сильно связан. Напротив, для любой нециклической жордановой матрицы  $A$  существует содержащая  $A$  система  $S$  с сильно связным  $G(S)$  и  $\langle\langle S \rangle\rangle \neq M_n$ .

Также будет рассказано о продвижениях в случае нильпотентной матрицы из двух жордановых клеток одинакового размера.

Докладчик благодарит своего научного руководителя доцента Ольгу Викторовну Маркову за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

### Источники и литература

- 1) Альпин Ю.А., Икрамов Х.Д. Рациональные процедуры в задаче об общих инвариантных подпространствах двух матриц. // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2000. Т. 268. С. 9–23.
- 2) Laffey T.J. A Note on Matrix Subalgebras Containing a Full Jordan Block. // Linear Algebra Appl., 1981. Vol. 37. pp. 187–189.
- 3) Laffey T.J. A Structure Theorem for Some Matrix Algebras. // Linear Algebra Appl., 1992. Vol. 162–164. pp. 205–215.
- 4) Lawrence B. Burnside graphs, algebras generated by sets of matrices, and the Kippenhahn conjecture. // Linear and Multilinear Algebra, 2019. Vol. 67. pp. 51–69.

- 5) Tsatsomeros M. A criterion for the existence of common invariant subspaces of matrices.  
// Linear Algebra Appl., 2001. Vol. 322. pp. 51–59.