Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Дифференциалы и интегралы матриц

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Даниелян Сурен Ваникович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: knoxja@yandex.ru

Связь корней многочлена и корней его производной активно изучалась со времен работ Гаусса (см. [1]). Одним из самых известных фактов является то, что корни производной лежат в выпуклой оболочке корней многочлена (теорема Гаусса-Люка). Однако в этой теме по-прежнему есть открытые вопросы, например гипотеза Сендова, которая утверждает, что если корни многочлена лежат в диске радиуса 1 с центром в нуле, то диски радиуса 1 с центрами в корнях производной покрывают все корни многочлена (см. [2]).

Для исследования связи корней многочлена и его производной мы определим матричное дифференцирование и интегрирование (см. [3]). Для матрицы A размера $(n+1)\times(n+1)$ и матрицы B размера $n \times n$, таких что

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ v & \tau(B) \end{pmatrix},$$

где $u, v \in \mathbb{K}^n$, а $\tau(B) := \frac{tr(B)}{n}$, если характеристические многочлены этих матриц связаны следующим образом

$$p'_A(x) = (n+1)p_B(x),$$

то матрица B является дифференциалом матрицы A, а матрица A – интегралом матрицы B.

Дифференциалы матриц были исследованы в работах Р. Перейры (см. [4]) и С. Маламуда (см. [5]), с их помощью была, например, доказана гипотеза Шонберга.

Интегралы матриц были рассмотрены в работе (см. [6]), в частности доказана интегрируемость циклических матриц.

Для произвольных матриц проблема интегрируемости остается открытой.

В этом докладе мы изучим связь интегрируемости матрицы с ее спектром (см. [7]). Скомбинировав интегралы матриц с известными матричными теоремами, такими как теорема Гершгорина, неравенство Шура и другими, опишем разнообразные следствия о связи корней многочлена и корней его производной (см. [8]).

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Источники и литература

1) C. F. Gauss, Gauss Werke, 3, 2nd Edn., Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften (1876).
2) G. Schmeisser, The conjectures of Sendov and Smale. Approximation theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov) (2002).
3) C. Davis, Eigenvalues of compressions, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR 51 (1959).
4) R. Pereira, Differentiators and the geometry of polynomials, J. Math. Anal. Appl. 285:1 (2003).

5) S.M. Malamud, An Analog of the Poincare Separation Theorem for Normal Matrices and the Gauss-Lucas Theorem. Functional Analysis and Its Applications (2003).

6) B.V.R. Bhat, M. Mukherjee, Integrators of matrices, Linear Algebra Appl. 426:1 (2007).

7) S. Danielyan, A. Guterman, On integral of polynomial with multiple roots, J. Math. Sci. (N. Y.) 249:2 (2020).

8) S.V. Danielyan, A.E. Guterman, T.W. Ng, Integrability of diagonalizable matrices and a dual Schoenberg type inequality, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2021).