Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Конвертация столбцовой мажоризации

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Штейнер Павел Михайлович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: pashteiner@ya.ru

Пусть $M_{n,m}$ — пространство действительных матриц размера $n \times m$ (пишем M_n при $m = n$). Столбец матрицы A под номером j обозначим $A^{(j)}$.

Определение. Различные типы мажоризаций матриц определяются следующим образом:

- Сильная мажоризация: $A \preceq^s B$, если существует такая двояко-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.
- Мажоризация по направлению: $A \preceq^d B$, если $Ax \preceq^s Bx$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$.
- Слабая мажоризация: $A \preceq^w B$, если существует такая строчно-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.
- Столбцовая мажоризация: $A \preceq^c B$, если существует такая столбцово-стохастическая матрица $X \in M_n$, что $A = XB$.

Теорема. Для линейного оператора Φ на $M_{n,m}$ Следующие утверждения эквивалентны:

1) Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
2) Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
3) Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
4) Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) = \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.
5) Выполнено одно из следующих условий:

   а) Существуют такие матрицы $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, что $\Phi(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$.

   б) Существует такая матрица $S \in M_m$, что $\Phi(X) = JXS$.

Автор доклада благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и ценные обсуждения. Докладчик является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner. Majorization for matrix classes. Linear Algebra Appl., 555(2018), 201–221.
2) G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner. Majorization for (0,1)-matrices. Linear Algebra Appl., 585(2020), 147–163.
3) A. Guterman, P. Shteyner. Linear converters of weak, directional and strong majorizations. Linear Algebra Appl., 613(2021), 320–346.
4) A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Second Edition, Springer, New York, 2011.

5) F.D. Martínez Pería, P.G. Massey, L.E. Silvestre. Weak matrix majorization. Linear Algebra Appl., 403 (2005) 343–368.

6) P. Shteyner. Конвертация столбцовой мажоризации. Записки ПОМИ, 496(2020), 195–215.