Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О свойствах минимальных не $\mathfrak{F}$-групп

Научный руководитель – Сорокина Марина Михайловна

Горепекина Анастасия Андреевна

Аспирант

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия

E-mail: nastya3296@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Класс представляет собой такую совокупность групп $\mathfrak{F}$, которая с каждой группой содержит все изоморфные ей группы. В теории классов конечных групп важную роль играют минимальные не $\mathfrak{F}$-группы, естественным образом обобщающие такие классические виды групп, как группы Миллера-Морено (минимальные неабелевы группы), группы Шмидта (минимальные ненильпотентные группы). Группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если $G \notin \mathfrak{F}$, но всякая собственная подгруппа группы G принадлежит классу $\mathfrak{F}$ (см., например, [3, гл. VI]). Целью исследования является установление влияния свойств минимальных не $\mathfrak{F}$-групп на строение класса $\mathfrak{F}$ в случаях, когда $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация групп (теорема 1) и $\mathfrak{F}$ — ω-веерный класс Фиттинга (теорема 2).

Используемые обозначения и определения для групп и классов групп стандартны (см., например, [3]). Для класса групп $\mathfrak{F}$ через $M(\mathfrak{F})$ обозначается совокупность всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп. Если $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — классы групп, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \{G \mid$ существует $N \triangleleft G$ такая, что $N \in \mathfrak{F}_1,\ G/N \in \mathfrak{F}_2\}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если: 1) $G \in \mathfrak{F},\ N \triangleleft G \Rightarrow G/N \in \mathfrak{F}$; 2) $G/N_1 \in \mathfrak{F},\ G/N_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если: 1) $G \in \mathfrak{F},\ N \triangleleft G \Rightarrow N \in \mathfrak{F}$; 2) $G = N_1N_2,\ N_1 \triangleleft G,\ N_2 \triangleleft G,\ N_1, N_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$. Формация, являющаяся классом Фиттинга, называется формацией Фиттинга. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп; ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; $\mathfrak{E}_\omega$ — класс всех ω-групп, т.е. таких групп G, что $\pi(G) \subseteq \omega$, где $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G; $O_\omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\omega}$ и $O^\omega(G) = G^{\mathfrak{E}_\omega}$ — $\mathfrak{E}_\omega$-радикал и $\mathfrak{E}^\omega$-корадикал группы G соответственно. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Через $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{E}_{p'}$ обозначаются классы всех p-групп и всех p'-групп соответственно. Группа G называется p-разрешимой, если каждый ее главный фактор является либо p'-группой, либо абелевой p-группой.

Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, т.е. функция вида: $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$. Формация $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$ называется ω-веерной формацией с направлением δ и ω-спутником f, где f — функция вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, $f(\omega') \neq \varnothing$ (здесь символ ω' обозначает элемент, не принадлежащий ω) [2]. Направление δ ω-веерной формации называется bp-направлением, если $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p) = \mathfrak{E}_{p'}\delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [1].

Теорема 1. *Пусть $p \in \omega$, $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с bp-направлением δ и внутренним ω-спутником f. Если всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа обладает минимальной нормальной p-разрешимой подгруппой, содержащей $f(p)$-корадикал группы, то $M(f(p)) \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)\}$ называется ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ и ω-спутником f, где f — функция вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ классы Фиттинга $\}$, $f(\omega') \neq \varnothing$ [2]. Направление δ ω-веерного класса Фиттинга называется bp-направлением, если $\mathfrak{N}_p\delta(p) = \delta(p) = \delta(p)\mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [1].

Теорема 2. *Пусть $p \in \omega$, $\mathfrak{F}$ — ω-веерный класс Фиттинга с bp-направлением δ и внутренним ω-спутником f. Если всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G обладает максимальной нормальной подгруппой $N \subseteq G_{f(p)}$, содержащей p-разрешимый корадикал группы G, то $M(f(p)) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.*

Источники и литература

1) Ведерников В. А. О новых типах ω-веерных классов Фиттинга конечных групп // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 897–906.

2) Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.

3) Шеметков Л. А. Формации конечных групп. Москва, Наука, 1978.