Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

СИММЕТРИИ ДВУМЕРНОЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ

Научный руководитель – Герман Олег Николаевич

Тлюстангелов Ибрагим Асланович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории чисел, Москва, Россия

E-mail: ibragim-tls@yandex.ru

Классическая теорема Лагранжа утверждает, что цепная дробь действительного числа α периодична тогда и только тогда, когда α является квадратичной иррациональностью. Тут же возникает естественный вопрос, каков критерий того, что период цепной дроби квадратичной иррациональности симметричен. Напомним, что последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, a_t)$ называется *циклическим палиндромом*, если существует такой циклический сдвиг индексов σ, что $a_k = a_{\sigma(t+1-k)}$ для любого $k \in \{1, \ldots, t\}$. В работах [1], [2], [3] (с переработанным вариантом в работе [4]) был найден ответ на вопрос: *каков критерий того, что период цепной дроби квадратичной иррациональности является циклическим палиндромом?* Доказательство этого критерия, использующее методы геометрии чисел, можно найти в статье [5].

Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Тогда гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через

$$\mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n).$$

Симплициальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\mathbf{0}$.

Определение 1. Пусть C — иррациональный конус, $C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathcal{K}(C) = (C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$ и его граница $\partial(\mathcal{K}(C))$ называются соответственно *полиэдром Клейна* и *парусом Клейна*, соответствующими конусу C. Объединение же парусов

$$\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)} \partial(\mathcal{K}(C))$$

называется $(n-1)$-*мерной геометрической цепной дробью.*

Данная работа посвящена описанию группы симметрий многомерных цепных дробей. Мы выделяем два типа симметрий: симметрии Дирихле, соответствующие умножению на единицы соответствующего расширения поля $\mathbb{Q}$, и так называемые палиндромические симметрии, соответствующие нетождественной перестановке индексов прямых $l_1, \ldots, l_n$. Именно наличие палиндромических симметрий эквивалентно наличию симметрий у периодов цепных дробей в классическом одномерном случае. Основным результатом работы является критерий наличия у двумерной цепной дроби палиндромических симметрий.

Источники и литература

1) E. Galois, Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques. Annales de Mathematiques, 19(1828), 294–301

2) A. M. Legendre, Theorie des nombres. (3 ed.). Paris, 1830

3) M. Kraitchik, Theorie des nombres. Tome II. Paris, 1926

4) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. (3 Aufl.). Teubner, 1954

5) O. N. German, I. A. Tlyustangelov, Palindromes and periodic continued fractions. Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 6(2016), issue 2–3, 354–373