Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Конструирование областей устойчивости методов типа Рунге-Кутты

Научный руководитель – Рыбков Михаил Викторович

Перехрест В.Д.[1], *Янбекова К.Д.*[2]

1 - Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, Красноярск, Россия, *E-mail: perekhrest-vasily@mail.ru*; 2 - Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, Красноярск, Россия, *E-mail: yanbeckova.kristina@yandex.ru*

При решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений в [1] предлагается применять явные методы типа Рунге-Кутты. Однако при интегрировании жестких задач условие устойчивости накладывает сильные ограничения на величину шага интегрирования, что существенно снижает эффективность явных методов. Известно, что функцией устойчивости явного m-стадийного метода типа Рунге-Кутты является многочлен степени m. Пусть заданы два числа k и m, $k \leq m$. Рассмотрим многочлены вида

$$Q_{m,k}(x_i)= F_i,\ k \leq i \leq m-1, \tag{1}$$

где коэффициенты c_i, $1 \leq i \leq k$, заданы, а c_i, $k+1 \leq i \leq m$, — свободные. Обычно c_i, $1 \leq i \leq k$, определяются из требований аппроксимации. Поэтому для определенности ниже будем предполагать, что c_i=1/i!, $1 \leq i \leq k$. Здесь реализован алгоритм получения свободных коэффициентов для многочленов устойчивости.

В [2] построен алгоритм получения коэффициентов многочленов устойчивости, с помощью которых можно построить явные методы первого порядка точности, до степени m=27.

Несмотря на то, что расширенные области устойчивости представляют интерес в первую очередь для методов низкого порядка, которые используются на участках установления, в то время как методы высокого порядка с небольшими областями устойчивости используются на погранслое, здесь исследуется задача построения областей устойчивости для методов произвольного порядка. В [2] построен алгоритм построения многочленов на отрезке [-1;1] подобно многочленам Чебышева. Здесь реализован алгоритм построения многочленов на участке [-γ;0], где γ — длина интервала устойчивости с применением библиотеки высокой точности. Из анализа графических изображений областей устойчивости следует, что форма, размер и структура области устойчивости зависят от расположения корней многочлена устойчивости (1) в комплексной плоскости. На расположение корней можно влиять выбором задаваемых в алгоритме входных параметров. При решении жестких задач, собственные числа матрицы Якоби которых имеют большие мнимые части и решения которых носят осциллирующий характер, часто не требуется значительное расширение интервала устойчивости. В этом случае шаг из условия точности выбирается достаточно малым, и поэтому расширение области устойчивости требуется в основном по мнимой оси. В случае наличия чисто мнимых собственных чисел нужно, чтобы на некотором участке мнимой оси выполнялось условие $|Q_{m,k}(x)|$=1. При повышении порядка точности, то есть с ростом k, это условие выполняется само собой. Для методов низкого порядка расширения области устойчивости по мнимой оси можно добиться за счет выбора коэффициентов c_i, $k+1 \leq i \leq m$, таким образом, чтобы корни многочлена устойчивости были комплексными. В зависимости от того, как он расположен относительно комплексных корней, изменяется размер, форма и структура области устойчивости.

Построены оценки, позволяющие определить размер области устойчивости в зависимости от степени многочлена m и порядка соответствующего явного метода. Определена зависимость входных данных алгоритма (в частности, значений многочлена в экстремальных точках) на расположение корней многочлена в комплексной области и, как следствие, форму области устойчивости.

Источники и литература

1) Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997.
2) Новиков Е. А., Рыбков М. В. Численный алгоритм построения многочленов устойчивости методов первого порядка // Вестник Бурятского государственного университета. 2014. № 9–2. С. 80–85.