Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Алгоритм интегрирования задач умеренной жесткости на основе метода Мерсона и методов с расширенной областью устойчивости

Научный руководитель – Рыбков Михаил Викторович

Хоров Данил Владимирович

Студент (специалист)

Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, Красноярск, Россия

E-mail: danilkhorov@gmail.com

Численное решение задачи Коши для систем ОДУ вида

$$y' = f(t, y),\ y\big(t_0\big) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k, \tag{1}$$

можно найти, используя явные методы типа Рунге-Кутты [1]

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} p_{mi} k_i,\ k_i = hf\Big(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\Big), \tag{2}$$

где y и f — гладкие вещественные N–мерные вектор функции, t — независимая переменная, k_i, $1 \le i \le m$, — стадии метода, α_i, p_{mi}, β_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le i-1$, — коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы. Это связано с тем, что при применении L–устойчивых методов возникает проблема с обращением матрицы Якоби. В случае большой размерности системы дифференциальных уравнений время декомпозиции данной матрицы фактически определяет общие вычислительные затраты. В то же время явные методы не нуждаются в вычислении матрицы Якоби и, если жесткость задачи не слишком велика, то они будут предпочтительнее. В настоящее время применяются алгоритмы переменного порядка и шага, что приводит к существенному повышению эффективности расчетов. На основе выбора коэффициентов β_{ij}, влияющих на устойчивость численных схем и алгоритма интегрирования в целом, реализованы методы с согласованными областями устойчивости, в которых промежуточные численные схемы согласуются с основной [2]. При этом внутренние схемы также имеют максимальный интервал устойчивости.

Здесь реализован алгоритм на основе явного метода высокого порядка и набора методов низкого порядка с расширенными областями устойчивости. Так как на переходных участках задачи предпочтительнее использовать явные методы, для расчета используется пятистадийный метод Мерсона 4 порядка точности. Пятое вычисление функции правой части дифференциальной задачи не дает увеличение порядка до пятого, но позволяет расширить интервал устойчивости до 3.5, который тем не менее является небольшим. Неявные методы более эффективны на участках установления, где производные малы и решение меняется незначительно. В предложенном алгоритме, функцию неявного метода выполняет метод низкого порядка с расширенной областью устойчивости. Подобные алгоритмы конструировались Е.А. Новиковым [1], однако метод низкого порядка обычно имел небольшое число стадий. Здесь применены методы с количеством стадий до 35, проведены численные эксперименты, показывающие повышение эффективности интегрирования.

Источники и литература

1) Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997.
2) Knaub L. V., Litvinov P. S., Novikov A. E., Rybkov M. V. Solving Problems of Moderate Stiffness Using Methods of the First Order with Conformed Stability Domains // Университетский научный журнал. 2016. № 22. С. 49–58.