Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О минимальных вершинных 1-расширениях двухцветных полных графов

Научный руководитель – Абросимов Михаил Борисович

Разумовский Петр Владимирович

Аспирант

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Факультет компьютерных наук и информационных технологий, Саратов, Россия

E-mail: shprotby@gmail.com

Основные определения теории графов в данной работе используются в соответствии [3]. Понятия минимальных расширений для графов даются в соответствии с [1].

Определение 1. Назовем граф $G_R = (V_R, \alpha_R)$ вершинным k-расширением (k — натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G можно вложить в каждый граф, получающийся из G_R удалением любых его k вершин.

Определение 2. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется минимальным вершинным k-расширением n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1 и 2.

В работе [2] был исследован способ построения всех неизоморфных функций раскраски для заданных графов, или, другими словами, всех цветных графов из заданного. Далее главным путем развития темы исследований цветных графов была выбрана задача поиска способа построения всех неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений (МВ-1Р) для заданных двухцветных полных графов. В ходе выполнения поставленной задачи были получены следующие теоремы.

Теорема 1. *Для полных n-вершинных двухцветных графов $K_n = (V, \alpha, f)$ с определенным на них отношением раскраски $f : V \to \{1, 2\}$, где $|\{f(v) = 1, v \in V\}| = 1$ и $|\{f(v) = 2, v \in V\}| = |V| - 1$, пример которых изображен на рис. 1 слева, минимальное вершинное 1-расширение строится по схеме, представленной на рис. 1 справа, с количеством дополнительных вершин, равным 2, и количеством дополнительных ребер $m = 2n - 1$.*

Теорема 2. *Для полных n-вершинных двухцветных графов $K_n = (V, \alpha, f)$ с определенным на них отношением раскраски $f : V \to \{1, 2\}$, где $1 \leq |\{f(v) = 1, v \in V\}| \leq |V| - 1$ и $1 \leq |\{f(v) = 2, v \in V\}| \leq |V| - 1$, пример которых изображен на рис. 2 слева, минимальное вершинное 1-расширение строится по схеме, представленной на рис. 2 справа, с количеством дополнительных вершин, равным 2, и количеством дополнительных ребер $m = 2n$.*

Исходя из данных двух теорем, схема построения МВ-1Р была найдена для всех возможных двухцветных полных графов. Это означает, что для каждого двухцветного полного графа существует МВ-1Р.

Источники и литература

1) Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012.
2) Абросимов М. Б., Разумовский П. В. О генерации неизоморфных вершинных k-раскрасок // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. №. 10. С. 136–138.
3) Богомолов А. М., Салий В. Н. Теория графов. М.: Наука, 1997.

Иллюстрации

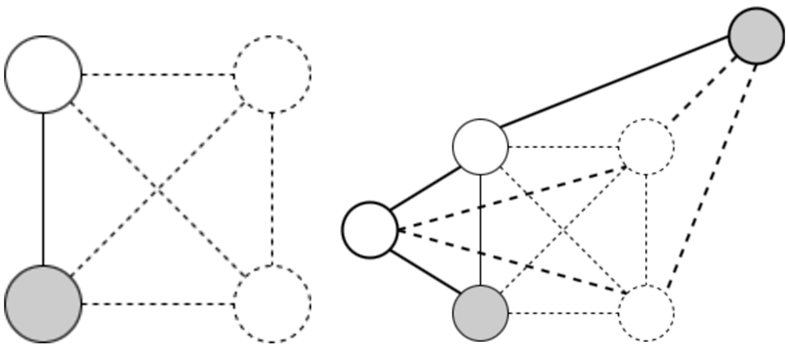

Рис. 1. Слева: полный двухцветный граф из теоремы 1. Справа: схема построения его МВ-1Р.

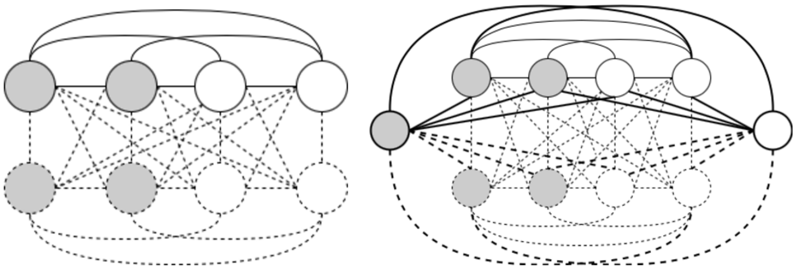

Рис. 2. Слева: полный двухцветный граф из теоремы 2. Справа: схема построения его МВ-1Р.