Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Исследование А-полноты линейных автоматов над подкольцами рациональных чисел.

Научный руководитель – Часовских Анатолий Александрович

Ронжин Дмитрий Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: d_rongin@mail.ru

Кольцо целых чисел будем обозначать $\mathbb{Z}$, поле рациональных чисел – $\mathbb{Q}$.
Кольцо двоично-рациональных чисел:

$$\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} = \left\{\tfrac{m}{2^n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ является подкольцом в $\mathbb{Q}$. Определим множество дробно-рациональных функций от переменной ξ с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) = \left\{\tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)} \mid P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}[\xi], Q(0) = 1, \gcd\left(P(\xi),\ Q(\xi)\right) = 1\right\}$$

Обозначим через $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ множество всех линейных автоматов[1][2][3] над $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$. Некоторые результаты о надклассе $L(\mathbb{Q})$ были получены в работе [4]. Рассматривается задача A-полноты[5] системы линейных автоматов в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.
Аналогично [4] определяется множество формальных степенных рядов над $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ и операции над ними, а также ряд вспомогательных обозначений. В работе [6] формулируются следующие множества (кратность понимаем в смысле кратности числителя):

1) $V_{\mathbf{P}} = \{V \mid V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), V-$ обладает **P** - свойством $\}$
2) $D = \{V \mid V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), V-$ обладает **D** - свойством $\}$
3) $\forall p > 2$ - простого, $M_p = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_i(1) \vdots p, \forall i \in [1, l]\}$
4) $\forall p > 2$, -простого, $T_p = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_0(0) \vdots p\}$
5) $T_{int} = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_i(0) \in \mathbb{Z}, \forall i \in [1, l]\}$
6) $T_{\geq 0} = \{V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, R_i(0) \geq 0, \forall i \in [1, l]\}$

Верны следующие утверждения:

Лемма 1.
$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{P} = \{p_i | p_i \neq 2$ - простое число, $i \in [1, k]\}$, $\forall$ простого $p > 2$, верно что: $V_{\boldsymbol{P}}$, D, M_p, T_p, T_{int}, $T_{\geq 0}$ — А-предполные классы.

Лемма 2. *$\forall V(x_1, x_2, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), \exists R_i \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), i \in [0, n]$, такие что:*

$$V(x_1, x_2, .., x_l) = R_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i.$$

Лемма 3. *$\forall R_i \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), i \in [0, l]$, существует линейный автомат $V(x_1, x_2, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, такой что:*

$$V(x_1, x_2, .., x_l) = R_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i.$$

Теорема 1. *Пусть $V^1 \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ - множество линейных автоматов арности ≤ 1, а $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ - конечная система. Если для $\forall \boldsymbol{P}$ - непустого конечного подмножества простых чисел, не содержащего двойку, $M \not\subset V_{\boldsymbol{P}}$, то $A(M \cup V^1) = L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.*

Теорема 2. *Пусть $V^{(1,1)} \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, такое что:*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V^{(1)}_{\cdot(n)}(x) = R' \cdot x + R'_0 \in V^{(1,1)},$$
$$R'(0) = n, R'_0(0) = 0, R', R'_0 \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}).$$

Пусть $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ - конечное множество. Если для $\forall \boldsymbol{P}$ - непустого конечного подмножества простых чисел, не содержащего двойку, $M \not\subset V_{\boldsymbol{P}}$, то $f^{(1)}_{\bigoplus}(x,y) \in \Sigma(M \cup V^{(1,1)})$, где

$$f^{(1)}_{\bigoplus}(x,y) = R_1 \cdot x + R_2 \cdot y + R_0,$$
$$R_1(0) = R_2(0) = 1, R_0(0) = 0.$$

Теорема 3. *Пусть $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ - конечная система, причем:*

1) $f^{(1)}_{\bigoplus}(x,y) \in M$, где $f^{(1)}_{\bigoplus}(x,y) = R_1 \cdot x + R_2 \cdot y + R_0$, где:
$$R_1(0) = R_2(0) = 1, R_0(0) = 0.$$
2) $\forall p > 2$ - простого, $M \nsubseteq T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0}$.

Тогда $V_{\bigoplus}(x,y) \in A(M)$.

Теорема 4. *Пусть - $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ - конечная система. Если $\forall p > 2$ - простых, выполняется:*

$$M \nsubseteq T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0},$$

то $A(M \cup \{V_{\bigoplus}(x,y)\}) = L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.

Теорема 5. *Задача проверки непринадлежности конечной системы $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ предполным классам $T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0}, V_{\boldsymbol{P}}$, $\forall p, \forall \boldsymbol{P}$, где $p-$ простые, отличные от двойки и $\boldsymbol{P}$ - непустые конечные подмножества простых чисел, отличных от двойки, является алгоритмически разрешимой. Приведена оценка временной сложности алгоритма.*

Теорема 6. *Для A-предполных классов $T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0}, D$, $V_{\boldsymbol{P}}$, $\forall p, \forall \boldsymbol{P}$, где p - простые, отличные от двойки и $\boldsymbol{P}$ - непустые конечные подмножества простых чисел, отличных от двойки верны следующие утверждения:*

1) Классы T_p, M_p, $T_{\geq 0}$, а так же $V_{\boldsymbol{P}}$, где $|\boldsymbol{P}| = 1$ являются конечно-порожденными по операциям A-замыкания.

2) Классы T_{int}, D и $V_{\boldsymbol{P}}$, где $|\boldsymbol{P}| > 1$ не являются конечно-порожденными по операциям A-замыкания.

Источники и литература

1) Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., Введение в теорию автоматов, НАУКА, Москва, 1985, 320 с.
2) Часовских А.А., "Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций", Дискретная математика, 27:2 (2015), 134-151
3) Chasovskikh A.A., "Completeness problem for the class of linear automata functions", Discrete Mathematics and Applications, 26:2 (2016), 89-104
4) Ронжин Д.В., "Линейные автоматы над полем рациональных чисел", Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 21:4 (2017), 144-155
5) Буевич В.А., "О полноте, A-полноте и t-полноте в классе автоматных отображений", Интеллектуальные системы, 10:1-4 (2006), 613-638
6) Ронжин Д.В., "Об условиях A-полноты линейных автоматов над двоично-рациональными числами Дискретная математика, издательство Наука (М.), том 32, № 2 (2020), с. 44-60