

Диффузия легкой составляющей бинарной газовой смеси в плоском канале

Научный руководитель – Попов Василий Николаевич

*Попов Игорь Васильевич**Студент (бакалавр)*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт прикладной математики и механики, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: igorabc1@yandex.ru

В теории пограничного слоя часто встречается случай бинарного газа, когда масса молекулы одного из компонентов значительно меньше массы молекулы другого [1]. Если парциальная плотность легкой составляющей существенно меньше тяжелой, то движением тяжелой составляющей можно пренебречь, считая ее неподвижной. Для случая полупространства, т.е. для случая, когда бинарная смесь заполняет полупространство над твердой стенкой, аналитическое решение получено в [2]. Численный анализ полученных выражений, описывающих диффузионный процесс, в [2] не проводился. В [3] задача о течении бинарной смеси в канале, толщина которого сопоставима со средней длиной свободного пробега молекул газа решается с использованием метода дискретных ординат. Рассматривается течение бинарных смесей неон-аргон и гелий-ксенон при наличии градиентов давления, температуры и концентрации. В первом случае массы молекул обоих компонентов примерно равны, во втором-массы молекулы одного компонента значительно больше массы другого. В [4] рассматривается задача Куэтта для смеси гелий-аргон в канале, стенки которого выполнены из различных материалов. Исследование течения газовой смеси в ультратонких капиллярах, размер которых сопоставим с радиусом действия поверхностных сил, было проведено в [5]. Целью настоящей работы является построение аналитического решения задачи о диффузии легкой компоненты бинарной смеси относительно более тяжелой в канале с бесконечными параллельными стенками. Рассмотрим диффузию легкой компоненты бинарной смеси относительно тяжелой в канале, стенки которого лежат в плоскостях $x' = \pm d$ прямоугольной декартовой системы координат. Предположим, что смесь состоит из газов a и b (соответственно легкая и тяжелая компонента) с числовыми плотностями (концентрациями) n_a и n_b и массовыми плотностями $\rho_a = m_a n_a$ и $\rho_b = m_b n_b$, где m_a и m_b – массы молекул газов a и b . Температуру газа будем считать постоянной, равной T . Предположим, что ось Oy' направлена вдоль градиента концентрации легкой компоненты. Если парциальная плотность легкой компоненты существенно меньше тяжелой, то движением тяжелой можно пренебречь, рассматривая ее неподвижной. Тогда безразмерное уравнение для легкой компоненты бинарной смеси запишется в виде:

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tau^2) Z(x, \tau) d\tau. \quad (1)$$

В качестве граничного условия на стенках канала воспользуемся моделью диффузного отражения. В этом случае граничные условия для функции $Z(x, \mu)$ на стенках канала запишутся в виде

$$Z(\pm d, \mp \mu) = 1, \quad \mu > 0. \quad (2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению уравнения (1) с граничными условиями (2). Решение уравнения (1) ищем в виде

$$Z(x, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta. \quad (3)$$

Здесь $a(\eta)$ – функция, подлежащая дальнейшему определению. С учетом результатов, представленных в [6], для нахождения $a(\eta)$ приходим к уравнению Фредгольма 2 рода

$$a(\eta) = h(\eta) \left[1 + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\mu X(-\mu) a(\mu) \exp(-d/\mu) d\mu}{\mu + \eta} \right].$$

Решив последнее с учетом статистического смысла функции распределения, находим поток массы легкой компоненты бинарного газа через единицу площади поперечного сечения канала [6]

$$J_M = \frac{G_n}{2(1-c)d^2} \left[(1-c) \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k K_k - d \right],$$

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\eta) d\eta, \quad K_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\eta) d\eta \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu_1) d\mu_1}{\mu_1 + \eta},$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\eta) d\eta \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu_1) d\mu_1}{\mu_1 + \eta} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu_2) d\mu_2}{\mu_2 + \mu_1},$$

$$\zeta(\eta) = \frac{\eta X(-\eta)}{|\lambda^+(\eta)|^2} \exp(-\eta^2) \left[1 - \exp\left(-\frac{2d}{\eta}\right) \right].$$

В представленной работе значения J_M/G_n рассчитаны для смеси He-Xe и относительной концентрации легкой компоненты $C = n_a/(n_a + n_b)$. При вычислении J_M/G_n полагали, что $m_b = 131.30$, $m_a = 4.0026$, $d_b/d_a = 2.226$, $d = (2d'/3)\beta^{1/2}\nu$. Как следует из проведенных расчетов, использованный в работе подход приводит к результатам, хорошо согласующимся с результатами [4].

Источники и литература

- 1) Ферцигер, Дж. Математическая теория процессов переноса в газах М.: Мир, 1976.
- 2) Латышев, А.В. Введение в кейсологию. Монография. М.: Отдел теоретических проблем РАН, деп. в ВИНТИ 16.09.1996, № 2823-В 96б. 237 с.
- 3) Garcia R.D.M., Sievert C.E. Channel Flow of Binary Gas Mixture of Rigid Spheres Described by the Linearized Boltzmann Equation and Driven by Temperature, Pressure and Density Gradients // SIAM Journal of Applied Mathematics. 2007. V. 67. p. 1041-1063.
- 4) Siewert C.E., Valougeorgis D. The McCormack model: channel flow of a binary gas mixture driven by temperature, pressure and density gradients // European Journal of Mechanics B/Fluids 23 (2004) p. 645–664.
- 5) Ролдугин, В.И., Жданов В.М. Кинетические явления при течении газовой смеси в наноразмерных капиллярах. Влияние поверхностных сил // Журнал технической физики. 2006. Т. 76, вып. 4. С. 45–52.
- 6) Попов, В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, вып. 1. С. 53–58.