

**Математическая модель оптимального управления ресурсами в условиях пандемии**

**Научный руководитель – Лутошкин Игорь Викторович**

**Рыбина Мария Сергеевна**

*Студент (бакалавр)*

Ульяновский государственный университет, Институт экономики и бизнеса, Ульяновск, Россия

*E-mail: rybina\_maria@icloud.com*

В настоящий момент существует проблема разработки инструмента, позволяющего определять эффективные варианты распределения ресурсов для социально-экономических систем в условиях пандемии. В работе [1] была предложена концепция построения математической модели, направленной на решение обозначенной проблемы. В настоящем исследовании производится построение модели на основе данной концепции.

Введём следующие обозначения:

$Y$  - валовой выпуск (руб.),  $\Pi$  - прибыль экономического субъекта (руб.),  $K$  - капитал (руб.),  $L$  - трудовые ресурсы (чел.),  $U_1$  - инвестирование в материальную базу учреждений здравоохранения (руб.),  $U_2$  - инвестиции в увеличение числа койко-мест (руб.),  $Z$  - количество койко-мест в учреждениях здравоохранения (ед.),  $U_3$  - инвестиции в источники информации, то есть в доведение до населения необходимых сведений по борьбе с эпидемией (руб.),  $N$  - общая численность популяции (чел.),  $P$  - количество лиц, соблюдающих ограничительные меры (чел.),  $S$  - количество лиц, потенциально подверженных заражению (чел.),  $E$  - количество подтверждённых носителей заболевания (чел.),  $I$  - количество лиц, у которых заболевание протекает с проявлением характерной симптоматики (чел.),  $Q$  - количество госпитализированных лиц, у которых заболевание протекает с проявлением характерной симптоматики (чел.),  $R$  - количество выздоровевших (чел.),  $D$  - количество умерших (чел.);  $\tau_1$  - момент времени, когда органы власти объявляют введение ограничительных мер,  $\tau_2$  - момент времени, когда органы власти объявляют ослабление ограничительных мер;  $a$  - доля лиц, переходящая из группы "потенциально подверженные заражению" в группу "соблюдающие защитные меры" в момент  $\tau_1$ ,  $b$  - доля лиц, переходящая из группы "соблюдающие защитные меры" в группу "потенциально подверженные заражению" в момент  $\tau_2$ ;  $k_i, i = \overline{1, 12}$ , - параметры, характеризующие взаимосвязи между переменными модели;  $e_j, j = \overline{1, 4}$ , - коэффициенты эффективности труда лиц: работающих дистанционно, подверженных риску заражения, заболевших, выздоровевших;  $s_j, j = \overline{1, 4}$ , - доля вложений труда представителей вышеуказанных групп в общий объём трудовых ресурсов.

Ниже представлены уравнения динамики изменения введенных показателей.

$$\frac{dS}{dt} = k_{10}P(t) + k_7R(t - \tau) - \left( k_2 \left( U_3(t), \frac{I(t)}{N(t)} \right) k_1(U_3(t)) - \rho \right) S(t) - a\delta_{t,\tau_1}S(t) + b\delta_{t,\tau_2}P(t),$$

где  $\rho$  - естественный прирост населения;  $\tau$  - временной лаг, в течение которого сохраняется иммунитет у выздоровевших;

$$\delta_{t,\tau_l} = \begin{cases} 1, & t = \tau_l, \\ \delta_{t,\tau_l} = 0, & t \neq \tau_l; \end{cases} \quad l \in \{1, 2\};$$

$$\frac{dP}{dt} = k_1(U_3(t))S(t) - k_{10}P(t) + a\delta_{t,\tau_1}S(t) - b\delta_{t,\tau_2}P(t);$$

$$\frac{dE}{dt} = k_2 \left( \frac{I(t)}{N(t)} \right) S(t) - (k_3 + k_8)E(t);$$

$$\frac{dI}{dt} = k_3E(t) - (k_4 + k_{11} + k_{12})I(t);$$

$$\frac{dQ}{dt} = k_4I(t) - (k_5 + k_6)Q(t);$$

$$\frac{dR}{dt} = k_8E(t) + k_{11}I(t) + k_6Q(t) - k_7R(t);$$

$$\frac{dD}{dt} = k_5Q(t) + k_{12}I(t);$$

$$\frac{dZ}{dt} = g(U_2(t)) - \mu Z(t) + k_9U_1,$$

где  $g(U_2)$  - функция, ставящая в соответствие инвестициям увеличение количества койко-мест,  $\mu$  - амортизация фондов.

Также выполняются следующие алгебраические связи:

$$N(t) = P(t) + S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t);$$

$$L(t) = s_1P(t) + s_2S(t) + s_3E(t) + s_4R(t),$$

где  $s_j = e_j * m$ ,  $j = \overline{1, 4}$ ;

$$Y(t) = F(K(t), L(t));$$

$$\Pi(t) = Y(t) - U_1(t) - U_2(t) - U_3(t);$$

$$Q(t) \leq Z(t).$$

Представленная система уравнений позволяет отслеживать динамику введенных показателей при наличии известных стратегий управления (инвестиций в материальную базу учреждений здравоохранения, инвестиций в увеличение числа койко-мест, затрат на информирование населения об эпидемии и мерах борьбы с её распространением), однако в случае неопределенности выбор таких стратегий представляется достаточно сложной задачей. Для разрешения этой задачи был введен интегральный критерий качества, представляющий задачу максимизации кумулятивной относительной прибыли на множестве управляющих воздействий за некоторый период от начала пандемии:

$$\int_{t_0}^T \Pi(t) \rightarrow \max_{U_1, U_2, U_3, \tau_1, \tau_2}.$$

### Источники и литература

- 1) Рыбина М.С., Лутошкин И.В. Математическое моделирование влияния пандемии на экономику // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Второе издание: переработанное и дополненное [Электронный ресурс] / Режим доступа: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020\\_2/data/6488/uid543558\\_074e5e0337016b052e86df2f633619c43a0046e6.doc](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/data/6488/uid543558_074e5e0337016b052e86df2f633619c43a0046e6.doc)