

Исследование плоского бильярда в эллипсе с полиномиальным потенциалом 6-го порядка

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Туньянц Доминика Арамовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
приложений, Москва, Россия

E-mail: 2001dat@inbox.ru

Одним из обобщений математического бильярда, предполагающего движение частицы в замкнутой ограниченной области без воздействия на нее внешних сил, является плоский бильярд с потенциалом, в частности, ограниченный эллипсом. Однако для того чтобы бильярд с эллипсе с потенциалом был вполне интегрируемой системой необходимо наложить на потенциал некоторые условия, которые изучались В. И. Драговичем [1] и В. В. Козловым [2]. И. Ф. Кобцев в своей дипломной работе и С. Е. Пустовойтов [3] проводили топологический анализ интегрируемых бильярдов с различными потенциалами, в т.ч. полиномиальными потенциалами 2-го и 4-го порядков.

Рассматривается бильярд в эллипсе с полиномиальным потенциалом 6-го порядка, имеющий вид $P_4 = a_{6,0}x^6 + a_{4,2}x^4y^2 + a_{2,4}x^2y^4 + a_{0,6}y^6$. Согласно теореме Козлова, бильярд с таким потенциалом будет вполне интегрируемой системой с первыми интегралами H — гамильтонианом — и F .

Для изучения топологии возникающих лиувиллевых слоений на изоэнергетических поверхностях полезно вычислить инварианты Фоменко-Цишанга. В зависимости от значения гамильтониана $H = h$ возникают различные изоэнергетические поверхности Q_h , у которых можно изучить слоение Лиувилля.

Утверждение 1

Рассмотрим плоский бильярд в эллипсе с потенциалом вида $P_4 = a_{6,0}x^6 + a_{4,2}x^4y^2 + a_{2,4}x^2y^4 + a_{0,6}y^6$. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности, соответствующей перестройке областей возможного движения (ОВД) частицы, имеющей эллиптические координаты (λ_1, λ_2) , имеет вид, указанный на рисунке.

Источники и литература

- 1) V.I.Dragovich, Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 62, №1, pp. 159-162, 1998
- 2) Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде., Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
- 3) Пустовойтов С.Е., Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2021, №5, 8–19

Иллюстрации

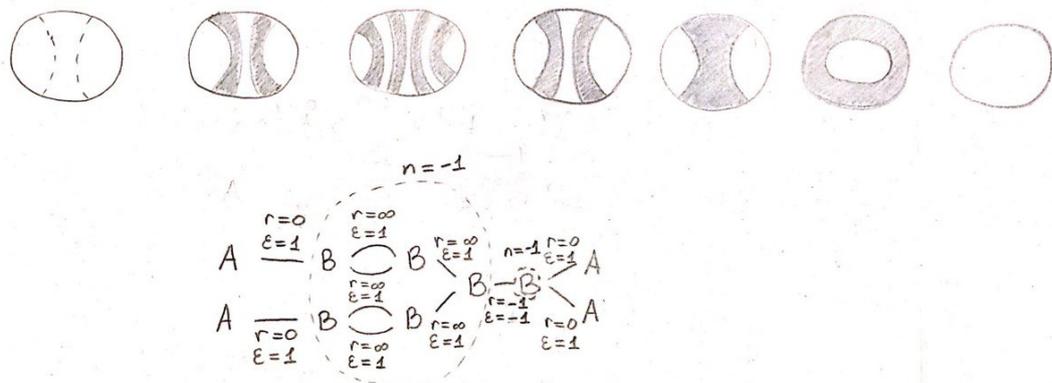


Рис. : Перестройка ОВД при изменении значения первого интеграла $F = f$ и соответствующий инвариант Фоменко-Цишанга