

## Инварианты аналога волчка Эйлера в псевдоевклидовом пространстве с некомпактными слоями

Научный руководитель – Кибкало Владислав Александрович

*Белюсов Никита Алексеевич*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия  
*E-mail: nikelousov09@gmail.com*

Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам был предложен в работах А.Т.Фоменко и его научной школы. Фазовое пространство системы — симплектическое многообразие  $(M^4, \omega)$  — разбивается на совместные уровни первых интегралов  $H, K$ , т.е. на нем возникает структура слоения Лиувилля.

Классифицирующим инвариантом лиувиллевой эквивалентности (послойной гомеоморфности, сохраняющей некоторые ориентации, является граф с числовыми метками, называемый меченой молекулой или инвариантом Фоменко–Цишанга. Его ребра отвечают семействам регулярных связных слоев-торов, вершины — бифуркациям слоения, т.е. 3-атомам. Числовые метки кодируют склейку  $Q^3$  из 3-атомов по диффеоморфизмам граничных торов. “Забывание” числовых меток приводит к инварианту Фоменко или грубой молекуле, классифицирующей системы с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

Топологический подход активно развивался для систем с более слабыми ограничениями: интегрируемых билиардов с кусочно-гладким слоением, гамильтоновых системы с неполными потоками, систем с некомпактными слоями, см. обзор А.Т.Фоменко и Д.А.Федосеева.

А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым [3] был рассмотрен класс “псевдоевклидовых” аналогов систем классической механики. Для этого на фазовом пространстве  $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$  выполним преобразование  $x_s \rightarrow ix_s, J_s \rightarrow iJ_s$  для  $s = 1, 2$ . В работах В.А.Кибкало, в том числе совместных с Е.С.Агуреевой и М.К.Алтуевым, показано, что слоения Лиувилля псевдоевклидовых аналогов волчка Эйлера, волчка Ковалевской и системы Жуковского содержат и компактные, и некомпактные слои, а также некритические (происходящие без точек падения ранга отображения момента) бифуркации слоения.

Для псевдоевклидова аналога волчка Эйлера первые интегралы  $f_1, f_2, H, K$  имеют вид

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3, \quad H = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} - \frac{J_3 - \lambda_3}{2A_3}, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2.$$

В работе [4] было описано разбиение пространства  $\mathbb{R}^3(\vec{J})$  на совместные уровни функций  $K$  и  $H$ . Результат существенно зависит от того, является ли главный момент инерции  $A_3$ , отвечающий отрицательной оси  $J_3$ , средним из трех  $A_i$  (тогда считаем  $0 < A_1 < A_3 < A_2$ ), или он является максимальным (минимальным) из трех. В первом случае каждая непустая связная компонента уровня  $K = k, H = h$  будет неограниченной, а во втором случае она будет компактной.

Для обоих случаев были построены бифуркационные диаграммы отображения  $K, H$  из неособого уровня  $M_{a,b}^4 : f_1 = a, f_2 = b$  в  $\mathbb{R}^2(k, h)$  для случая  $(a, b) \neq (0, 0)$  и  $a \cdot b = 0$ . Каждый совместный уровень  $f_1, f_2, H, K$  кроме  $(h, k) = (0, 0)$  имеет тип прямого произведения,

первый множитель которого есть совместный уровень двух квадрик  $K = k, H = h$  в  $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ , а второй — совместный уровень квадрики  $f_1 = a$  и плоскости  $f_2 = b$  в  $\mathbb{R}^3(\vec{x})$  при фиксированном  $\vec{J}$ . Дугам диаграммы сопоставляются аналоги 3-атомов Фоменко, т.е. классы послышной гомеоморфности слоения Лиувилля, находящегося в прообразе малого отрезка, трансверсального к данной дуге.

В работе мы завершим анализ “некомпактного” случая  $A_1 < A_3 < A_2$ , построим бифуркационные диаграммы при  $a > 0, b \neq 0$  и  $a < 0, b \neq 0$ , опишем возникающие аналоги 3-атомов и грубых молекул для неособых уровней гамильтониана  $H$  или интеграла  $K$ .

**Теорема 1.** *Слоение Лиувилля “некомпактного” псевдоевклидова волчка Эйлера с условием  $A_1 < A_3 < A_2$  для неособых пар  $(a, b) \neq (0, 0)$ , ограниченное на неособую изоэнергетическую  $Q_h^3$  или изоинтегральную  $Q_k^3$  поверхность, задается как оснащенный граф  $M_i$  или несвязное объединение таких графов, изображенных на рис. 2. В случае  $a \cdot b = 0$  инвариант слоения на неособой  $Q_h^3$  и  $Q_k^3$  зависит от знака  $h$  или  $k$ , см. табл. 1. В случае  $a \cdot b \neq 0$  неособым зонам значений  $H$  и  $K$ , упорядоченным по возрастанию соответствующей функции, отвечают следующие инварианты:*

$$a > 0, h : 2M_4, M_3, M_2, M_1; \quad a > 0, k : 2M_{10}, 2M_{11}, 2M_{11};$$

$$a < 0, h : 4M_9 \sqcup 4M_8, 2M_7 \sqcup 4M_8, M_5 \sqcup M_6; \quad a < 0, k : \emptyset, 2M_{10}, 2M_{11}.$$

случай	$h > 0$	$h < 0$	$k > 0$	$k < 0$
$a > 0, b = 0$	$M_{12}$	$2M_{13}$	$2M_{11}$	$2M_{10}$
$a = 0, b \neq 0$	$M_5 \sqcup M_6$	$2M_{14} \sqcup 4M_8$	$2M_{11}$	$2M_{10}$
$a < 0, b = 0$	$2M_6$	$8M_8$	$2M_{11}$	$\emptyset$

Таблица 1: Аналоги грубых молекул слоений Лиувилля на неособых  $Q_h^3$  и  $Q_k^3$  в случае  $ab = 0$ .

### Источники и литература

- 1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2 // Изд. дом "Удмуртский университет Ижевск 1999
- 2) Fedoseev D.A., Fomenko A.T. Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // J. Math. Sc. 2020. 248. 810–827
- 3) Borisov A.V., Mamaev I.S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. of Math. Phys. 2016. 23, No4. 431–454
- 4) Алтуев М.К., Кибкало В.А. Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров // Матем. сб. 2023. 214, No3. 54–70

### Иллюстрации

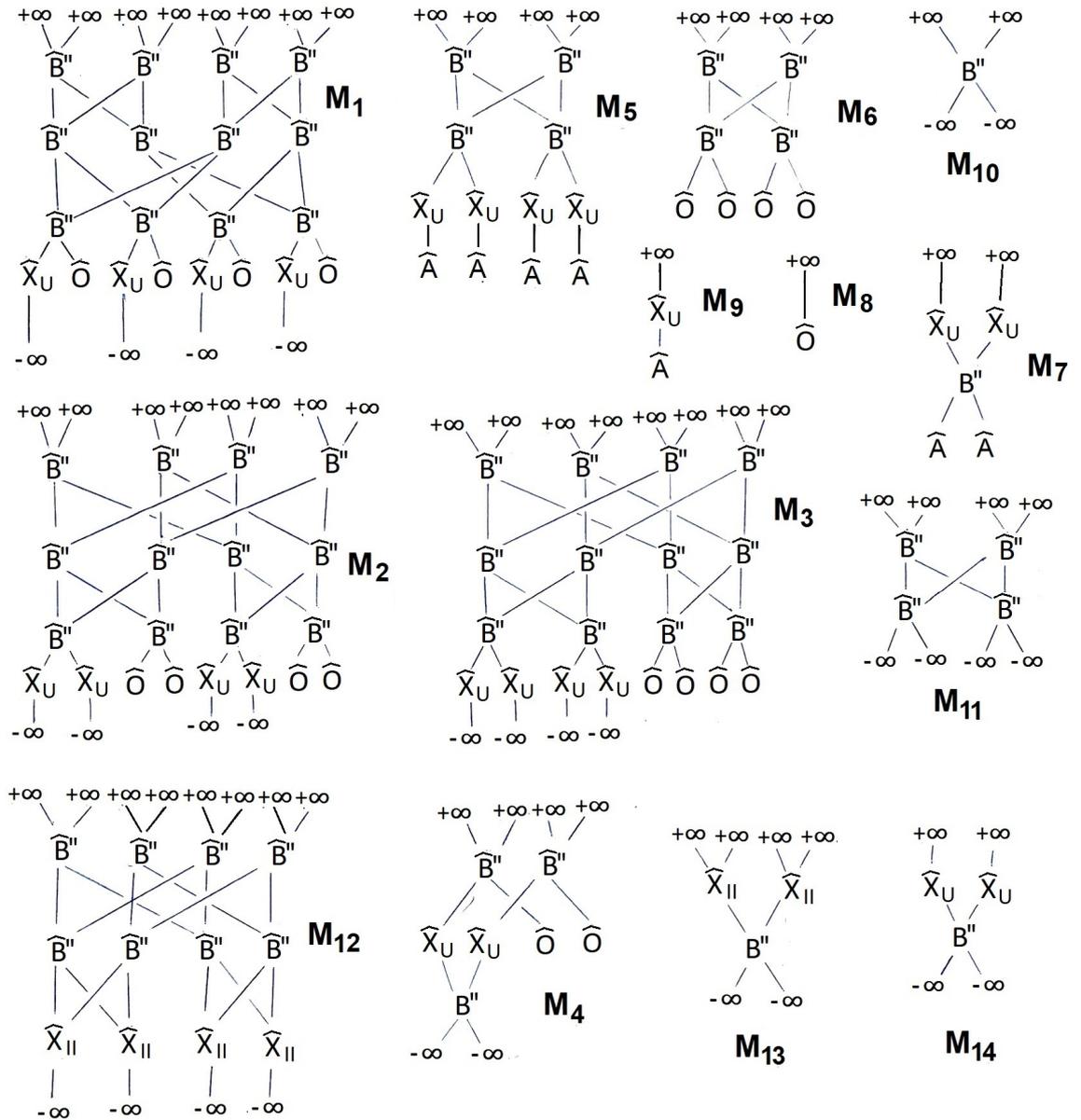


Рис. : Аналоги грубых молекул слоев Лиувилля на связных компонентах неособых  $Q_h^3$  и  $Q_k^3$ .