

Компьютерная формализация системы L3 со схемами аксиом**Научный руководитель – Бястинова Екатерина Вячеславовна****Иванов Дмитрий Владимирович***Выпускник (специалист)*

Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

E-mail: dima@danilovplaza.org

Доклад посвящен формализации системы L3 для исчисления высказываний из книги Э. Мендельсона “Основы логики” [1, с. 36]. Нелогическими символами теории являются пропозициональные буквы A_i , логические символы: отрицание ($\neg$) и импликация ($\supset$). Технические символы — “(“ и “)“.

Аксиомы:

- 1) $(A \supset (B \supset A))$
- 2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$
- 3) $((\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B))$

Формализация выполнена с помощью системы `soq`, которая позволяет записывать формальные теории и доказательства теорем с проверкой их корректности.

Результат работы:

- 1) Семантическая непротиворечивость: $\forall A (\vdash A \supset \models A)$. Доказана.
- 2) Семантическая полнота: $\forall A (\models A \supset \vdash A)$. Доказана.
- 3) Синтаксическая непротиворечивость: $\neg \exists B (\vdash B \wedge \vdash \neg B)$. Доказана.
- 4) Синтаксическая полнота: $\forall A (\neg \vdash_L A \supset \exists B, (\vdash_{L+A} B \wedge \vdash_{L+A} \neg B))$. Пока не доказана.

Далее идет описание файлов проекта.

1. Formula.v

Введен тип `atom` для пропозициональных переменных. Определено понятие “формула”, нотации для записи основных логических функций: отрицания и импликации. Определены производные логические функции: конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция. Отношения между формулой и множеством формул: принадлежность формулы множеству формул, пустое множество формул, объединение двух множеств формул, одно множество формул является подмножеством другого.

2. Syntactic.v

Определения и теоремы для синтаксической теории. Определены 3 аксиомы, определено понятие выводимости формулы из множества формул ($\Gamma \vdash A$). Доказаны теоремы: $\vdash A \supset A$, ослабление контекста: $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow (\Gamma \vdash A \rightarrow \Delta \vdash A)$.

- 1) Понятие расширения контекста формулой: **extend**: если дано множество формул Γ , и множество из одной формулы $\{A\}$, то $extend \Gamma A = \Gamma \cup \{A\}$.

- 2) Теорема об утверждении консеквента: $\forall \Gamma \forall A \forall B (\Gamma \vdash B \rightarrow \Gamma \vdash A \supset B)$.
- 3) Теорема дедукции: $\forall \Gamma \forall A \forall B (\text{extend } \Gamma \ A \vdash B \rightarrow \Gamma \vdash A \supset B)$.
- 4) Теорема о транзитивности: $\forall \Gamma \forall A \forall B (\Gamma \vdash A \supset B \rightarrow (\Gamma \vdash B \supset C \rightarrow \Gamma \vdash A \supset C))$.
- 5) Теорема T_1_10_7: $\forall \Gamma \forall A \forall B ((\Gamma \vdash A \supset B) \rightarrow ((\Gamma \vdash \neg A \supset B) \rightarrow \Gamma \vdash B))$ — она потребуется при доказательстве семантической полноты методом Кальмара.

3. Semantic.v

Файл содержит формализацию семантической теории. Определение функции для вычисления значения формулы при данных значениях пропозициональных переменных:

```
Fixpoint eval {atom : Set} (value : atom -> bool) (f : formula) : bool :=
  match f with
  | f_atom a => value a
  | f_not f' => negb (eval value f')
  | f_imp f1 f2 => implb (eval value f1) (eval value f2)
end.
```

Доказаны теоремы о свойствах вычислителя для формул и теоремы об условиях истинности формул. Определены понятия общезначимой формулы и противоречия, понятия логического следования и логической эквивалентности формул.

4. Meta.v

В этом файле доказываются все заявленные метатеоремы. Доказывается, что каждая аксиома является тавтологией, и Modus Ponens из двух тавтологий дает тавтологию. Дано определение понятия “теорема”. Доказана теорема о семантической непротиворечивости.

Введена функция “Переписыватель” для формул:

$$\text{rewriter}(A, V) = \begin{cases} A, & \text{если eval } A \ V = \text{true} \\ \neg A, & \text{если eval } A \ V = \text{false} \end{cases}$$

2 теоремы о свойствах переписывателя:

- 1) $(\Gamma \vdash \text{rewriter } v \ \neg f) \rightarrow (\Gamma \vdash \text{rewriter } v \ f)$,
- 2) $\Gamma \vdash \text{rewriter } v \ f \rightarrow (\Gamma \vdash \text{rewriter } v \ \neg f)$.

Определен класс типов EqDec с разрешимым равенством.

Определено понятие списка уникальных элементов, доказаны теоремы о свойствах таких списков. Определена функция для извлечения пропозициональных переменных из формулы, и создания уникального списка пропозициональных переменных для формулы.

Для доказательства теоремы Кальмара требовалось составить сигма тип из списка пропозициональных переменных для формулы, и четырех свойств (теорем), которым удовлетворяет данный список:

- 1) Все элементы списка являются буквами из формулы и все буквы из формулы принадлежат списку.
- 2) Список пропозициональных переменных не пуст.

- 3) Список пропозициональных переменных уникален.
- 4) Теорема об истинности переписывателей: для всякого распределения значений пропозициональных переменных переписыватель от всякой формулы доказуем в контексте переписывателей, примененных к формулам, образованным из списка её букв.

Вспомогательная теорема для доказательства семантической полноты: если для всякого распределения значений пропозициональных переменных формула доказуема в контексте переписывателей, примененных к формулам, образованным из списка её букв, то формула доказуема в пустом контексте.

Последней доказана теорема о семантической полноте методом Кальмара.

Источники и литература

- 1) Э. Мендельсон Введение в математическую логику. М.: издательство «Наука», 1976.
- 2) Иванов Д.В. Исходный код проекта [Электронный ресурс]
URL: <https://github.com/usr345/mendelson> (Дата обращения: 01.03.2025)