Рассматриваются условия самосопряженности дифференциальных операторов второго порядка с общей инволюцией, порожденных операцией вида

$$\ell_\nu[u](x) \equiv p(x)u''(\nu(x)) + q_\nu(x)u(\nu(x)) + q(x)u(x), \tag{1}$$

где $p(x)$, $q_\nu(x)$, $q(x)$ – некоторые непрерывные на $[-1,1]$ функции, а $\nu(x)$ - гладкая инволюция отрезка $[-1,1]$ на себя, причем $p(x) \neq 0 \quad \forall x \in [-1,1]$ Оператор, соответствующий (1), будет рассматриваться на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset W_1^2[-1,1]$, определяемой линейно независимыми краевыми условиями общего вида:

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \alpha_2 u'(1) + \alpha_3 u(-1) + \alpha_4 u(1) = 0, \\ \beta_1 u'(-1) + \beta_2 u'(1) + \beta_3 u(-1) + \beta_4 u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Для самосопряженных выражений вида (1) построена асимптотика квадратов собственных значений получаемых операторов.

Теорема 1. *Пусть функция $\nu(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[-1,1]$ и $\nu'(x) < 0 \quad \forall x \in [-1,1]$. Тогда дифференциальный оператор вида*

$$\mathcal{L}_\nu u(x) \equiv (-\nu'(x))^{\frac{3}{2}} u''(\nu(x)) + \frac{1}{4}\mu'(x)u(\nu(x)) + q(x)u(x), \tag{3}$$

где $\mu(x) = \frac{\nu''(y)}{(-\nu'(y))^{\frac{3}{2}}}$, а $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, является формально самосопряженным.

Краевые условия будут самосопряженными при выполнении для них равенства:

$$u'(x)v(\nu(x))(-\nu'(x))^{-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1} + u(x)v'(\nu(x))(-\nu'(x))^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1} -$$
$$-\frac{1}{2}u(x)v(\nu(x))(-\nu'(x))^{-\frac{3}{2}}\nu''(x)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

В силу линейной независимости краевых условий (2) их всегда можно привести к одному из следующих типов:

1)

$$\begin{cases} u'(-1) = au(-1) + bu(1), \\ u'(1) = cu(-1) + du(1), \end{cases}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;

2.а)

$$\begin{cases} cu'(-1) + du'(1) = u(1), \\ eu(-1) = u(1), \end{cases}$$

где $c^2 + d^2 \neq 0,\ e \neq 0,\ c, d, e \in \mathbb{R}$;

2.б)

$$\begin{cases} cu'(-1) + du'(1) = u(-1), \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

где $c^2 + d^2 \neq 0,\ c, d \in \mathbb{R}$;

2.в)

$$\begin{cases} cu'(-1) + du'(1) = u(1), \\ u(-1) = 0, \end{cases}$$

где $c^2 + d^2 \neq 0,\ c, d \in \mathbb{R}$;

2.г)

$$\begin{cases} u(1) = 0, \\ u(-1) = 0; \end{cases}$$

3.а)

$$\begin{cases} u'(-1) = cu'(1), \\ u(-1) = du(1), \end{cases}$$

где $c \neq 0,\ c, d \in \mathbb{R}$;

3.б)

$$\begin{cases} u'(1) = 0, \\ u(-1) = cu(1), \end{cases}$$

где $c \in \mathbb{R}$;

3.в)

$$\begin{cases} u'(-1) = cu'(1), \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

где $c \in \mathbb{R}$;
3.г)

$$\begin{cases} u(-1) = cu(1), \\ u'(-1) = 0, \end{cases}$$

где $c \in \mathbb{R}$;
3.д)

$$\begin{cases} u'(1) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Лемма 1. *Краевые условия типа 3.б) и 3.в) не являются самосопряженными.*

Теорема 2. *Краевые условия 2.г) и 3.д) являются самосопряженными. Краевые условия типов 1, 2.а)-2.в), 3.а), 3.г) будут самосопряженными, если выполнены следующие условия:*
1) $d\nu'(1) - a(\nu'(1))^2 + \frac{1}{2}\nu''(1) = 0$,
2.а) $c - de\nu'(1) = 0$,
2.б) $c = 0$,
2.в) $d = 0$,
3.а) $d + c\nu'(1) = 0$,
3.г) $c = 0$,

Пусть в дифференциальном операторе (3) инволюция $\nu(x)$ - достаточно гладкая функция и $\nu'(x) < 0 \ \ \forall x \in [-1, 1]$ и $q(x) \equiv 0$.

Теорема 3. *Собственные значение самосопряженного оператора, порождаемого выражением (3) с $q(x) \equiv 0$, удовлетворяют асимптотическому равенству:*

$$|\lambda_k| = \Big(2k\frac{\pi}{h}\Big)^2\Big(1 + O\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big), \quad k \to \infty,$$

где $h = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{-\nu'(x)}dx.$