

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Фахразиева Эльмира Алмазовна

Аспирант

Кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный
университет, Ижевск, Россия

E-mail: elmiraf12@mail.ru

Научный руководитель — Попова Светлана Николаевна

Рассмотрим линейную управляемую гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$; функции $A_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ и $B_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ и управление $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ кусочно непрерывны, могут иметь лишь разрывы первого рода и непрерывны справа в точках разрыва; функции $A_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$, $B_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$ ($j = 1, 2$), $A_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, и $B_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ и управление $v: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ произвольны. Предполагаем, что нормы всех матриц ограничены на области определения. Обозначим $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$.

Под решением системы (1) при выбранных управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ понимаем функцию $z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t \in (k, k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Определение 1. Систему (1) назовем равномерно вполне управляемой, если существуют $\vartheta \in \mathbb{N}$ и $L > 0$ такие, что для каждого $l \in \mathbb{N}_0$ и любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления $u: [l, l+\vartheta) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$, $v: [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1) с начальными условиями $x(l) = x_0$, $y(l) = y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет равенствам $x(l+\vartheta) = x_1$, $y(l+\vartheta) = y_1$, при этом

$$\sup_{t \in [l, l+\vartheta)} \|u(t)\| \leq L \max\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\},$$

$$\max_{k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \|v(k)\| \leq L \max\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\}.$$

Выберем в системе (1) управления $u(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $v(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_2}$, получим свободную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t)$. Положим

$$Z(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$Z(k, l) = Z(k, k-1)Z(k-1, k-2) \dots Z(l+1, l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (2) имеет место равенство $z(k) = Z(k, l)z(l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0, k > l$. Будем называть матрицу $Z(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0, k > l$, *матрицей Коши* гибридной системы (2) в целочисленные моменты времени. Будем предполагать, что для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ матрица $Z(k+1, k)$ обратима, и найдется такое $a > 0$, что $\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|Z^{-1}(k+1, k)\| \leq a$.

Определим матрицы

$$B(j) = \begin{pmatrix} \int_j^{j+1} X(j+1, \tau) B_{11}(\tau) d\tau & \int_j^{j+1} X(j+1, \tau) d\tau B_{12}(j) \\ B_{21}(j) & B_{22}(j) \end{pmatrix},$$

$$W(l, k) = \sum_{j=l}^{k-1} Z(l, j+1) B(j) B^*(j) Z^*(l, j+1), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad l < k.$$

Будем называть матрицу $W(l, k)$ *матрицей управляемости* (матрицей Калмана) системы (1) на отрезке $[l, k]$.

Теорема 1. *Если существуют $\gamma > 0$ и $\vartheta \in \mathbb{N}$ такие, что при всех $l \in \mathbb{N}_0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $\xi^* W(l, l + \vartheta) \xi \geq \gamma \|\xi\|^2$, то система (1) равномерно вполне управляема.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.