

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ НЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С КОМПЛЕМЕНТАРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Янь Чжибай

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: yanzhibai@cs.msu.ru

Научный руководитель — Алексей Феридович Измаилов

Рассматривается задача оптимизации с комплементарными ограничениями:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad \langle G(x), H(x) \rangle = 0, \quad (1)$$

где $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $G, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкие отображения. Такие задачи имеют многочисленные приложения, таких как двухуровневые задачи оптимизации, задачи оптимизации на множествах параметрических равновесий, и др. [1]. Главная сложность таких задач заключается в нарушении традиционных условий регулярности ограничений в каждой допустимой точке.

Система условий первого порядка оптимальности для задачи (1) имеет виде:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda, \mu) = 0, \quad \langle G(x), H(x) \rangle = 0,$$

$$\mu^G \geq 0, \quad G(x) \geq 0, \quad \langle \mu^G, G(x) \rangle = 0, \quad \mu^H \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad \langle \mu^H, H(x) \rangle = 0,$$

где $\mu = (\mu^G, \mu^H)$, а $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Лагранжа задачи (1):

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda \langle G(x), H(x) \rangle - \langle \mu^G, G(x) \rangle - \langle \mu^H, H(x) \rangle.$$

Эту систему может быть эквивалентным образом переформулировать как уравнение с ограничением:

$$\Phi(u) = 0, \quad u \in P, \quad (2)$$

где $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ — некоторое заданное отображение, а $P \subset \mathbb{R}^p$ — замкнутое выпуклое множество.

В работе рассматриваются следующие переформулировки: $p =$

$$n + 2m + 1, q = n + 3m,$$

$$P = \{u = (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m) \mid G(x) \geq 0, H(x) \geq 0\},$$

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda, \mu) \\ G(x) \circ H(x) \\ \mu^G \circ G(x) \\ \mu^H \circ H(x) \end{pmatrix},$$

где $\circ$ — произведение Адамара, или

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda, \mu) \\ \min\{G(x), H(x)\} \\ \min\{\mu^G, G(x)\} \\ \min\{\mu^H, H(x)\} \end{pmatrix}.$$

Также используются переформулировки со слэками, позволяющие задать множество P только условиями неотрицательности на часть переменных.

Нарушение условий регулярности в задаче (1) делает решения уравнений (2) неизолированными, требующими применения методов Левенберга-Марквардта [2] и LP-Newton [3]. В работе проведен численный эксперимент на выборке задач из коллекции MacMPEC [4], демонстрирующий, что данные методы могут конкурировать с имеющимися альтернативными (в том числе оптимизационными) методами, причем не только по робастности и эффективности, но и плане качества получаемых приближенных решений с точки зрения исходной задачи оптимизации (1).

Литература

1. Luo Z.-Q., Pang J.-S., Ralph D. Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. Cambridge University Press, 1996.
2. Fischer A., Izmailov A.F., Solodov M.V. The Levenberg-Marquardt method: an overview of modern convergence theories and more // Computational Optimization and Applications, 2024.
3. Fischer A., Herrich M., Izmailov A.F., Solodov M.V. A globally convergent LP-Newton method // SIAM Journal on Optimization, 2016, Vol. 26, pp. 2012-2033.
4. MacMPEC. <http://wiki.mcs.anl.gov/leyffer/index.php/MacMPEC>.