
Для заданной одномерной непрерывной действительной функции $f(x)$, где $x \in [a, b]$, которая может иметь несколько экстремумов, задача нахождения первого нулевого пересечения формулируется следующим образом. Требуется найти точку x^* , такую что

$$x^* = \min\{x \mid f(x) = 0, x \in S\}, \quad (1)$$

где $S = [a, b]$ — допустимый интервал.

Данная задача имеет множество практических приложений. Например, в проектировании аналоговых фильтров частота среза может быть найдена путем определения точки нулевого пересечения. Кроме того, этот метод широко используется в обнаружении границ цифровых изображений, а также в вейвлет-преобразованиях.

Разработан алгоритм FFR-baseline (FFR — это сокращение от «Find First Root») для нахождения первой точки нулевого пересечения для одномерной функции, основанный на методе ветвей и границ, который сочетает в себе кусочно-линейные [1] и кусочно-квадратичные нижние оценки [2].

Основные шаги алгоритма FFR-baseline следующие:

1. Разветвление: Текущий интервал делится на несколько меньших подинтервалов. Методом деления пополам интервал $S_k = [x_1, x_2]$ разбивается на два равных по ширине подинтервала, которые затем добавляются в рабочий список L .

2. Ограничение: Используются два правила для отбрасывания подзадач.

- 2.1. Первое правило ограничения основано на сравнении нижней границы с нулем. Используется оценка $\varphi(x)$ для вычисления нижней границы текущего интервала S_k , нижняя граница интервала S_k определяется как $lb = \min \varphi(x), x \in S_k$. Если $lb > 0$, то интервал S_k удаляется из списка L , так как он не содержит корней $f(x)$.

- 2.2. Второе правило ограничения применяется, если рассматриваемый интервал находится правее известной самой левой точки x_t , в которой функция отрицательна (фиксированная точка).

3. Терминальное правило: Процесс ветвления и ограничения продолжается до тех пор, пока не будет найден гарантированный первый ноль или пока все подинтервалы не будут обработаны и рабочий список L не станет пустым.

На основе алгоритма FFR-baseline мы предложили улучшенный алгоритм с редукцией, названный FFR-reduction. Алгоритм сокращает объем вычислений, удаляя области поиска, которые, как дока-

зано, не могут содержать нулевые точки.

Основные улучшения FFR-reduction следующие. После завершения шага ограничения, если текущий интервал $[x_1, x_2]$ не был удален из L , он уменьшается до $[\underline{x}, \bar{x}]$ (Рис. 1). Где $\underline{x}$ образован первым нулем непрерывной нижней оценки $\varphi(x)$, то есть

$$\underline{x} = \min\{x \mid \varphi(x) = 0, x \in [x_1, x_2]\}. \quad (2)$$

И $\bar{x}$ состоит из первого нуля верхней непрерывной оценки $\Phi(x)$ и последнего нуля нижней непрерывной оценки $\varphi(x)$, то есть

$$\bar{x} = \begin{cases} \max\{x \mid \varphi(x) = 0, x \in [x_1, x_2]\}, & \text{if } f(x_2) > 0, \\ \min\{x \mid \Phi(x) = 0, x \in [x_1, x_2]\}, & \text{if } f(x_2) \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для оценивания качества алгоритмов FFR-baseline и FFR-reduction были реализованы с помощью кусочно-линейных и кусочно-квадратичных оценок. Кроме того, мы сравнили предлагаемые алгоритмы с наиболее эффективным алгоритмом из [3], который использует адаптивное несимметричное бисекционирование (далее именуемый IBV). Все алгоритмы были протестированы 100 раз с использованием 27 тестовых случаев.

Экспериментальные результаты показывают, что использование процедуры редукции всегда повышает производительность алгоритма — время выполнения в среднем сокращается вдвое. Этот алгоритм в среднем в 2.3 раза быстрее, чем алгоритм IBV из [3]. Таким образом, можно сделать вывод, что предложенные в статье методы весьма эффективны для определения первой точки пересечения нуля многоэкстремальной функции.