Исследование модели нелинейной оптической системы с интегральной обратной связью

Сердюкова Татьяна Игоревна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `tatiana.grivko@gmail.com`

Научный руководитель — *Разгулин Александр Витальевич*

Рассматривается начально-краевую задачу для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u + u = K\left(I_{fb} + G\int_{\theta}^{t}\left(I_{fb} - [I_{fb}]\right)dt\right), \tag{1}$$
$$u = u(x,y,t), \qquad (x,y)\in\Omega = [0,2\pi]^2, \qquad t\in[0,T],$$

с периодическими граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi},\ \ u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=2\pi},\quad u_y\Big|_{x=0} = u_y\Big|_{x=2\pi},\ \ u_x\Big|_{y=0} = u_x\Big|_{y=2\pi}, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x,y). \tag{3}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ - оператор Лапласа,

$$I_{fb}(x,y,t) = 1 + \gamma\cos(u(x,y,t) + \varphi(x,y,t)), \quad [g] = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy,$$

$d > 0$, $K > 0$, $G \geqslant 0$, $\theta > 0$, $\gamma \in (0,1)$ - известные константы, функция $\varphi(x,y,t)$ известна и при почти всех t измерима на Ω.

Задача (1) – (3) возникает в нелинейной адаптивной оптике и описывает поведение оптической системы коррекции волнового фронта на основе интерферометра с обратной связью [3].

Введем пространства

$$H^1_{\#}(\Omega) = \{u\in H^1(\Omega):\ u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}, u|_{y=0} = u|_{y=2\pi}\}, \tag{4}$$
$$X = L_2(0,T;\ H^1_{\#}(\Omega)), \quad W = \{u:\ u\in X, u'\in X^*\}. \tag{5}$$

Будем искать решение задачи $u \in W \subset C([0,T];\ L_2(\Omega))$ – это следует из вложений $H^1_{\#}(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset H^{1*}_{\#}(\Omega)$. В начальном условии

(3) $u_0 \in L_2(\Omega)$.

Теорема 1. *Для любого начального данного $u_0 \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u \in W = \{u \in X : \ u' \in X^*\} \subset C([0,T];\ L_2(\Omega))$ задачи (1) – (3), причем оно непрерывно зависит от этого начального данного.*

Для обоснования теоремы использованы приемы [2] для доказательства существования и единственности решения и его непрерывной зависимости от начального данного.

Предложен численный метод решения задачи (1) – (3). Введём равномерную сетку на $t \in [0,T]$: $t_n = n\tau$, $n = \overline{1,K}$. Пусть нижний предел интеграла θ кратен шагу сетки τ: $t_{n_0} = n_0 \cdot \tau = \theta$.

Предложена нелинейная конечномерная аппроксимация задачи, имеющая второй порядок аппроксимации по τ в половинных узлах $t_{n+1/2} = \tau \cdot (n+1/2)$:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} - d\Delta u^{n+1/2} + u^{n+1/2} = K\left(1 + \gamma\cos v^{n+1/2} + G \cdot I^{n+1/2}\right), \\ \frac{I^{n+1}-I^n}{\tau} = \gamma\cos v^{n+1/2} - \gamma\left[\cos v^{n+1/2}\right], \qquad n \geqslant n_0 \\ I^n = 0, \qquad 0 \leqslant n \leqslant n_0, \\ u^0 = u_0(x,y), \end{cases} \tag{6}$$

где $u^n = u^n(x,y)$ – искомое приближенное решение на слое t_n, $u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1}+u^n}{2}$, $v^{n+1/2} = u^{n+1/2} + \varphi(t_{n+1/2})$, $I^{n+1/2} = \frac{I^{n+1}+I^n}{2}$.

Для решения нелинейной системы (6) предложен итерационный процесс. На каждом слое введена последовательность итераций $u^{(s)}$, приближающих искомый элемент u^{n+1}.

На каждой итерации задача нахождения $u^{(s+1)}$ представляет собой краевую задачу для уравнения Пуассона с периодическими граничными условиями. Для ее решения использован метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями [1], с учетом периодических граничных условий.

Литература

1. Андреев В. Б. Лекции по методу конечных элементов. М., 2010.
2. Гаевский Ф., Грёгер М., Захариас М. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
3. Larichev A., Nikolaev I., Pavlov S., Razgulin A. Phase distortion suppression in a nonlinear optical system with integral feedback // Laser Physics, 2015. Vol. 25, № 11, P. 115401.