**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИНАМИКА ПОПУЛЯЦИЙ:
ВЫХОД ЗА РАМКИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СУПЕРПОЗИЦИИ
КИРКВУДА И ПЕРЕХОД К МЕТОДУ
ФИШЕРА—КОПЕЛИОВИЧА**

Юрченко Илья Сергеевич

Студент

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

Факультет компьютерных наук, Москва, Россия

E-mail: isyurchenko@edu.hse.ru

Научный руководитель — Никитин Алексей Антонович

Математическое моделирование позволяет прогнозировать поведение некоторых физических систем, таких как биологические сообщества [3–4]. Это важно для анализа динамики популяций организмов, размерами которых можно пренебречь, в сравнении с их средой обитания (например, грибы, планктон и т. д.).

Предметом изучения данной работы являются система нелинейных интегро–дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию популяции в течение времени в ограниченной области, и метод ограничения размерности системы, называемый замыканием [1]. Нами исследуется предложенный в работе [4] метод Фишера–Копелиовича на примере однородной (учитывается только абсолютное расстояние между особями без пространственной структуры) одновидовой среды с неподвижными индивидами, которые конкурируют между собой и размножаются. Математически модель эволюции системы представима в виде следующих уравнений, где $F_{(1)}(t)$ — первый пространственный момент (плотность популяции), $F_{(2)}(x, t)$ — второй пространственный момент (плотность пар особей) и $F_{(3)}(x, y, t)$ — третий момент (плотность троек особей).

$$\frac{dF_{(1)}(t)}{dt} = (q^B - q^D) F_{(1)}(t) - \int w^D(x) F_{(2)}(x, t) dx$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_{(2)}(x, t)}{dt} = & -2(q^D + w^D(x)) F_{(2)}(x, t) - \int w^D(y) (F_{(3)}(x, y, t) + \\ & + F_{(3)}(-x, y, t)) dy + \int \mu^B(y) q^B (F_{(2)}(x + y, t) + \\ & + F_{(2)}(x - y, t)) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_{(3)}(x, y, t)}{dt} = & - \int w^D(z) (F_{(4)}(x, y, z, t) + F_{(4)}(-x, y - x, z) + \\
 & + F_{(4)}(-y, x - y, z)) dz + \\
 & + \left(\mu^B(x) (F_{(2)}(y - x) + F_{(2)}(y)) + \right. \\
 & + \mu^B(y) (F_{(2)}(x) + F_{(2)}(y - x)) + \\
 & + \left. \mu^B(x - y) (F_{(2)}(x) + F_{(2)}(y)) \right) q^B + \\
 & + \int \mu^B(z) \left(F_{(3)}(z + x, z + y) + F_{(3)}(z - x, z + y - x) + \right. \\
 & + \left. F_{(3)}(z - y, z + x - y) \right) q^B dz - \\
 & - \left(3q^D + 2(w^D(x) + w^D(y) + w^D(x - y)) \right) F_{(3)}(x, y, t)
 \end{aligned}$$

Параметры модели задаются как в виде констант: $q^{D,B}$ — коэффициенты смертности и рождаемости, так и в виде плотности случайной величины: $\mu^B(x)$, $w^D(x)$ — ядро разброса при рождении особи и ядро конкуренции в зависимости от расстояния между особями.

Для замыкания бесконечной системы уравнений используется метод Фишера–Копелиовича, адаптированный из гидродинамики:

$$\begin{aligned}
 F_{(4)}(x, y, z, t) = & \frac{F_{(3)}(x, y, t) F_{(3)}(x, z, t) F_{(3)}(y, z, t)}{F_{(2)}(x, t) F_{(2)}(y, t) F_{(2)}(z, t) F_{(2)}(y - x, t)} \cdot \\
 & \cdot \frac{F_{(3)}(y - x, z - x, t)}{F_{(2)}(z - x, t) F_{(2)}(z - y, t)} (F_{(1)}(t))^4
 \end{aligned}$$

Численное решение системы находится с помощью алгоритма Рунге–Кутты четвёртого порядка, используются свойства симметрии пространственных моментов, алгоритм Кээна и другие методы работы с числами с плавающей точкой.

Результаты сравниваются с точной симуляцией. Исследование проводится на шести наборах данных с различными параметрами, такими как большое ядро разброса (особи распространяются быстрее на большую область) с сильной конкуренцией на маленьком расстоянии, сильная конкуренция на большом расстоянии и большое ядро разброса.

Литература

1. Галкин Е. Г., Иноземцев Л. В., Никитин А. А., Николаев М. В. О методах анализа состояния равновесия в модели популяцион-

- ной динамики Дикмана-Лоу // Вестник Московского университета. 2024. № 4. С. 73–85.
2. Dieckmann U., Law R. Moment approximations of individual-based models. *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity* // Cambridge University Press. 2000. P. 252–270.
 3. Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments. *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity* // Cambridge University Press. 2000. P. 412–455.
 4. Omelyan I. Spatial population dynamics: Beyond the Kirkwood superposition approximation by advancing to the Fisher–Kopeliovich ansatz // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2019.