

ПРИМЕНЕНИЕ В-СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Морозов Егор Павлович

Студент 4 курса

Факультет РК МГТУ имени Н. Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: egor.p.morozov@gmail.com

Научный руководитель — Мурашов Михаил Владимирович

Обратные задачи являются важным аспектом в различных областях науки и техники. Традиционные методы аппроксимации не всегда способны обеспечить необходимую точность и устойчивость решений. Особенно остро эта проблема проявляется в технических областях, где требования к точности моделирования постоянно растут. В частности при использовании методов глубокого обучения мы точно не можем сказать, где будет лежать наше предсказанные данные - выше или ниже исходных, а также возникают проблемы при увеличении размерности пространства входных параметров и т.п. [1]

Одним из перспективных подходов к решению обратных задач является применение В-сплайновых аппроксимаций [2]. Этот метод позволяет учитывать локальные особенности систем и обладает устойчивостью к неполным или зашумленным данным. За основу он берёт координаты определённых реперных точек, узнав координаты которых мы сможем получить довольно-таки хорошую аппроксимацию различных кривых, а также получить регулятор для наших данных.

Согласно теории В-сплайнов, все реперные точки должны отставать от функции на определённое расстояние [2], но если мы возьмём их на самой кривой, то мы при достаточном приближении получим параллельную кривую, смещённую выше или ниже нашей заданной. На основе данного заключения, а также на основе теоремы единственности многочлена наилучшего равномерного приближения, выведенной П.Л.Чебышевым получим следующую теорему:

Теорема 1. Пусть имеются произвольные функции $F_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), F_2(x_{21}, \dots, x_{2n_2}) \dots F_l(x_{l1}, \dots, x_{ln_l})$, где l – количество известных функций и $l < \max(n_k)$, где n_k – размерность пространства решений каждой из функций, $k = 1 \dots l$, зависящие от множества значений $x_{11}, \dots, x_{ln_k}$, а также $f_l = F_l(x_{l1}^*, \dots, x_{ln_l}^*)$, тогда взяв заранее известные наборы $\vec{x}_i = \{x_{11}^i, \dots, x_{ln_l}^i\}$, такие

что $|f_{li} = F_l(x_i) - f_i| \leq 0.5f_i^{**}$, $i_l = 0 \dots m_l$, $m_l > n_l - 1$, набор $x_{l1}^*, \dots, x_{lm_l}^*$ можно найти как

$$x_{op}^*(u_1, \dots, u_l) \approx \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_l=0}^{m_l} \prod_{j=1}^o \frac{m_j!}{i_j!(m_j - i_j)!} u_j^{i_j} (1 - u_j)^{m_j - i_j} x_{opi_j} \quad (1)$$

Где $o = 1 \dots l$, $p = 1 \dots n_l$, $u_1 \dots u_l \in [0, 1]$ вычисляется из условия:

$$\left(\sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_l=0}^{m_l} \prod_{j=1}^o B_{m_j i_j j}(u_j) \right)^2 + \Psi_l - \Phi_{lm_j} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Где } \Phi_{lm_j} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^{m_j} f_{ji} \frac{m_j!(1+i)^2}{i!} \sum_{k=0}^{m_j-i} \frac{(-1)^k}{k!(m_j+i+k)!(k+i+1)}, \quad \Psi_l = \sum_{j=1}^l f_i, \quad B_{m_j i_j j}(u_j) = \frac{m_j!}{i_j!(m_j - i_j)!} u_j^{i_j} (1 - u_j)^{m_j - i_j} f_{ji}$$

Также если мы рассмотрим исходное значение $\Theta(u)_j$, то согласно неравенству Йенсена [3] мы можем получить следующее свойство:

Следствие 1. Если $\Theta(u)_j$, ограниченная на участке $A=[a,b]$, выпукла, то наша кривая будет лежать ниже искомого участка функции.

Если $\Theta(u)_j$, ограниченная на участке $A=[a,b]$, вогнута, то наша кривая будет лежать выше искомого участка функции.

В заключение хочу сказать, что данная теорема была проверена на реальных данных из 500 точек и с размером сетки в $\frac{1}{500^2}$ дало точность в $1.4 \times 10^{-5}\%$ и было рачитано за 1.3с, при AMD Ryzen 9 7940HS с графикой Radeon 780M, 4,00 ГГц. А также при увеличении размерности скорость вычислений не изменялась.

Литература

1. Möller, Dietmar PF. "Machine learning and deep learning."Guide to Cybersecurity in Digital Transformation: Trends, Methods, Technologies, Applications and Best Practices. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. 347-384.
2. Piegl, Les, and Wayne Tiller. The NURBS book. Springer Science & Business Media, 2012.
3. Jensen, Johan Ludwig William Valdemar. "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes."Acta mathematica 30.1 (1906): 175-193