

**СРАВНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА  
ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ  
ВНУТРЕННИМ УЗЛОМ**

*Чернышов Михаил Михайлович*

*Аспирант*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: chernyshovmm@my.msu.ru*

*Научный руководитель — Вабищевич Петр Николаевич*

Метод конечных элементов [2] является широко используемым численным методом для решения дифференциальных уравнений, возникающих в различных областях физики и инженерии. Он основан на разбиении области на конечные элементы и аппроксимации неизвестных функций внутри этих элементов с помощью полиномиальных функций.

Лагранжевы конечные элементы являются одним из наиболее распространенных типов элементов, используемых в методе конечных элементов. Они основаны на аппроксимации неизвестной функции внутри элемента с помощью полиномиальных функций, где значения функции в узлах элемента являются неизвестными. Лагранжевы элементы могут быть линейными, квадратичными или кубическими, в зависимости от степени полинома и количества промежуточных узлов.

Пузырьковые (bubble) элементы [3] представляют собой особый тип конечных элементов, где в аппроксимацию добавляются функции, нулевые на границах элемента и ненулевые внутри него. Эти функции, называемые пузырьками, позволяют улучшить локальную точность решения без увеличения количества глобальных неизвестных. Bubble элементы часто используются для улучшения свойств конечных элементов, таких как устойчивость и точность, особенно в задачах с высокой концентрацией градиентов или в областях с особыми свойствами.

Пузырьково обогащенные лагранжевы (bubble enriched Lagrange) конечные элементы [1] представляют собой модификацию лагранжевых элементов, где в каждый элемент добавляется дополнительная функция, называемая пузырьком. Эта функция нулевая на границах элемента и ненулевая внутри него, что позволяет улучшить точность аппроксимации без увеличения количества узлов на границах элемента.

Добавление точки в треугольник и последующее его разделение

на три можно рассматривать как измельчение сетки. При решении задач на таких сетках с использованием лагранжевых конечных элементов количество неизвестных будет таким же, как при использовании пузырьково обогащенных лагранжевых элементов. В связи с этим проводится сравнение точности указанных конечных элементов на соответствующих сетках при решении тестовой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-00058).

### Литература

1. Lee C., Natarajan S., Hale J. S., Taylor Z. A., Yee J. and Bordas S. Bubble-Enriched Smoothed Finite Element Methods for Nearly-Incompressible Solids // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. — 2021. — Т. 127. — № 2. — P. 411–436.
2. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. and Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. — Elsevier, 2005.
3. Scroggs M. W., Brubeck P. D., Dean J. P., Dokken J. S., Marsden I., et al. *DefElement: an encyclopedia of finite element definitions*. — <https://defelement.org>, 2025.