

МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

Люй Тяоян

Студент магистратуры

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: jueduier1@yandex.com

Научный руководитель — Шобухов Андрей Вадимович

Первое математическое описание многокомпонентной диффузии [1] было предложено Онсагером в 1931 году. Затем интерес к этой теме вновь возник в 1950-ые годы; тогда были написаны труды Хиршфельдера, Кёртисса, Бёрда и Вильямса [2]-[3]. Но все предложенные в них системы уравнений были линейны относительно концентраций реагентов.

Примеры диффузии с нелинейной зависимостью коэффициента от концентрации вещества были предложены в статьях и книгах Филипа и Кранка [4]-[6]. Но в этих работах изучали только однокомпонентный случай.

В 1986 году Быков, Горбань и Яблонский [7] показали, что для выполнения требования ограниченности концентраций многокомпонентная диффузия должна нелинейно зависеть от концентраций. Там же они предложили модель такой диффузии, выводимую из закона действующих масс. Далее эта модель исследовалась в [8]-[9].

В настоящей работе нелинейная модель из [7] применяется для случая смеси двух веществ и сравнивается со стандартной линейной диффузией. Установлен ряд свойств стационарных решений, не рассмотренных в [7]-[9]. Показано лучшее соответствие нелинейной модели наблюдаемым физическим процессам.

Диффузия смеси двух веществ в растворителе описывается задачей:

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'' \\ c_2'' \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{D}_1 \cdot c_2 & \tilde{D}_1 \cdot c_2 \\ \tilde{D}_2 \cdot c_2 & -\tilde{D}_2 \cdot c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'' \\ c_2'' \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$c'_{1,2}(t, 0) = 0 \quad ; \quad c'_{1,2}(t, 1) = 0 \quad ; \quad c_{1,2}(0, x) = \varphi_{1,2}(x) \quad ;$$

$$\tilde{D}_1 = \frac{D_1 C_{\max}^2}{L^2} \quad ; \quad \tilde{D}_2 = \frac{D_2 C_{\max}^2}{L^2}.$$

которая обобщает подход [7]. Здесь: $c_{1,2} = c_{1,2}(t, x)$ – это нормированные на $[0;1]$ концентрации веществ; $D_{1,2}$ – их коэффициенты диффузии из молекулярно-кинетической теории; $C_{\max}$ – наибольшая из их концентраций насыщения; L – размер области. Параметр $0 \leq \mu \leq 1$ регулирует степень нелинейности: $\mu = 0$ даёт линейную систему двух уравнений диффузии с диагональной матрицей; $\mu = 1$ отвечает полностью нелинейной системе из [7].

Мы сравниваем решения (1) при $\mu = 0$ и $\mu = 1$. Для большинства начальных условий оба решения при $t \rightarrow \infty$ выходят на постоянное распределение

$$c_1(t, x) \equiv c_1^* = \int_0^1 \varphi_1(\xi) d\xi, \quad c_2(t, x) \equiv c_2^* = \int_0^1 \varphi_2(\xi) d\xi, \quad (2)$$

Но время выхода на него при $\mu = 0$ и $\mu = 1$ может очень сильно различаться.

В то же время нам удалось строго доказать необычное свойство системы (1) при $\mu = 1$: если начальное распределение удовлетворяет требованию:

$$\varphi_2(x) = 1 - \varphi_1(x), \quad (3)$$

где $\varphi_1(x)$ – любая гладкая функция, удовлетворяющая $\varphi_1'(0) = 0$, $\varphi_1'(1) = 0$, то:

$$c_1(t, x) \equiv \varphi_1(x), \quad c_2(t, x) \equiv \varphi_2(x) \quad (4)$$

– это стационарное решение (1); т.е., начальное распределение вида (3) со временем не изменяется. Подобное свойство не было известно ранее.