

**Регуляризованный след оператора Штурма-Лиувилля с малым сдвигом и условиями Дирихле**

**Научный руководитель – Шкаликов Андрей Андреевич**

**Северцов Станислав Александрович**

*Студент (магистр)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

*E-mail: stas.severtsov@mail.ru*

Рассмотрим оператор  $T$  в  $L_2(0, 1)$ , задаваемый действием на функцию  $y(x)$  следующим образом:

$$(Ty)(x) = (-1)^n y^{(2n)}(x) + q(x)y(x) + p(x)(y(x + \varepsilon) - y(x)),$$

с областью определения

$$D(T) = \{y(x) \in W_2^{2n}(0, 1) \mid y(0) = y(1) = 0, \\ y''(0) = y''(1) = 0, \dots, y^{(2n-2)}(0) = y^{(2n-2)}(1) = 0\},$$

где  $q(x), p(x) \in C_{[0,1]}^2$  и функция  $y(x)$  продолжена нулём вне  $(0, 1)$ . Заметим, что при  $n = 1$  и при  $q(x), p(x) \in C_{[0,1]}^1$  этот оператор был рассмотрен в [1] и получена асимптотика его собственных значений. Пусть  $\{\mu_j\}$  - собственные значения оператора  $T$ . Используя Теорему 5.4.1 [2] получаем результат.

**Предложение 1.** *Регуляризованный след оператора  $T$  выглядит так:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \mu_j - \pi^{2n} j^{2n} - \int_0^1 q(x) dx + 2 \sin^2 \left( \frac{\pi \varepsilon j}{2} \right) \int_0^{1-\varepsilon} p(x) dx + \int_{1-\varepsilon}^1 p(x) dx \right] = \\ = \frac{q'(0) - q'(1)}{24} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{4\pi^2 j^2} \int_0^1 \cos(2\pi j x) q''(x) dx + \frac{p(1-\varepsilon) \sin(2\pi \varepsilon j)}{2\pi j} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi^2 j^2} \int_{1-\varepsilon}^1 \cos(2\pi j x) p''(x) dx + \right. \\ \left. + \frac{p'(1) - p'(1-\varepsilon) \cos(2\pi \varepsilon j)}{4\pi^2 j^2} + \frac{1}{\pi j} \sin \frac{\pi \varepsilon j}{2} \left( \cos \frac{\pi \varepsilon j}{2} p(0) - \cos \frac{3\pi \varepsilon j}{2} p(1-\varepsilon) \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sin \frac{\pi \varepsilon j}{2}}{2\pi^2 j^2} \int_0^{1-\varepsilon} \sin \left( 2\pi j x + \frac{\pi \varepsilon j}{2} \right) p''(x) dx - \frac{\sin \frac{\pi \varepsilon j}{2} \sin \left( \frac{3}{2} \pi \varepsilon j \right) p'(1-\varepsilon)}{2\pi^2 j^2} - \frac{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon j}{2} \cdot p'(0)}{2\pi^2 j^2} \right] \end{aligned}$$

Из сходимости ряда в правой части получаем:

**Следствие 1.** *При  $j \rightarrow \infty$  справедливо*

$$\mu_j = \pi^{2n} j^{2n} + \int_0^1 q(x) dx - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi \varepsilon j}{2} \right) \int_0^{1-\varepsilon} p(x) dx - \int_{1-\varepsilon}^1 p(x) dx + o(1)$$

где  $o(1)$  стремится к нулю при  $j \rightarrow \infty$

Пользуясь возможностью, автор благодарит Шкаликова А.А. за полезные замечания и рекомендации.

### Источники и литература

- 1) Борисов Д. И., Поляков Д. М., “Асимптотики собственных значений оператора Шрёдингера с малым сдвигом и условием Дирихле”, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 517 (2024), 44–49; Dokl. Math., 109:3 (2024), 227–231
- 2) Садовничий В.А. Теория операторов : учебник / В. А. Садовничий ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. – 7-е изд., испр.. – Москва : Издательство Московского университета, 2023 - (Классический университетский учебник).