Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Регуляризация задачи справедливого оптимального обмена

Научный руководитель – Богачев Владимир Игоревич

Соколов Кирилл Олегович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: sokolovko@my.msu.ru

В последнее время широко изучаются различные модификации задачи Монжа–Канторовича оптимального перемещения мер. Одним из важных примеров, связанных с описанной далее задачей, является задача оптимальной транспортировки с ограничениями на плотность [2, 3].

В недавней работе [1] рассматривалась задача об оптимальном обмене, которую можно сформулировать как некоторую разновидность задачи оптимальной транспортировки мер. Пусть X – множество участников торгов, S – множество товаров. Пусть даны меры $\pi^+, \pi^- \in \mathcal{M}_+(X \times S)$, задающие стоимость товара, который соответствующий участник хочет, соответственно, получить или отдать. Задача оптимального обмена заключается в максимизации вариации меры γ, которая удовлетворяет естественным ограничениям баланса, а именно стоимость отданного равна стоимости полученного для каждого участника. Таким образом, получаем следующую задачу:

$$\max_{\gamma \in \Pi} ||\gamma|| \tag{1}$$

$$\Pi = \{\gamma \in \mathcal{M}_+(X \times S) : \ \mathrm{Pr}_S(\gamma^+) = \mathrm{Pr}_S(\gamma^-), \ \mathrm{Pr}_X(\gamma^+) = \mathrm{Pr}_X(\gamma^-), \ \gamma^\pm \le \pi^\pm\}, \tag{2}$$

где γ^+ и γ^- ограничения меры γ на носители мер π^+ и π^- соответственно.

Доклад будет посвящен регуляризованной версии задачи оптимального обмена, в которой максимизируемый функционал имеет вид

$$\max_{\gamma \in \Pi} \int f\left(\frac{d\gamma}{d\pi}\right) \, d\pi, \tag{3}$$

где f строго выпуклая возрастающая функция, $f(0) = 0 = 1 - f(1)$. Для данной задачи доказываются теоремы о двойственности и виде решения, которое единственно в виду строгой выпуклости функционала.

В частности, в качестве f рассматривается функция $f(x) = x(1 - \ln(x))$, для которой будут представлены результаты численного решения задачи.

Источники и литература

1) A. Kolesnikov, S. Popova. On the problem of optimal fair exchange. *arXiv:2412.06522*, 2024.
2) J. Korman, R.J. McCann. Optimal transportation with capacity constraints. *Trans. Amer. Math. Soc., Vol.* 367:3, pp. 1501-1521, 2015.
3) J. Korman, R.J. McCann, C. Seis. Dual potentials for capacity constrained optimal transport. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* 54, pp. 573-584, 2015.