Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Формула для суммы одного условно сходящегося ряда

Научный руководитель – Мирзоев Карахан

Бармак Белла Давидовна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

E-mail: barmakbella@mail.ru

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00128)

Рассмотрим гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \tag{1}$$

Пусть $p \in \mathcal{N}$. Знаки в ряде (1) изменим так, чтобы за p положительными членами следовало бы столько же отрицательных членов, затем снова p положительных членов и т.д. В результате получим условно сходящийся ряд

$$S_p := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \ldots - \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} + \ldots + \frac{1}{3p} - \ldots . \tag{2}$$

Задача отыскания формул для сумм сходящихся рядов, в частности, рядов вида (2), является классической задачей анализа и привлекает внимание математиков уже на протяжении многих веков. Так, например, формула Лейбница

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

была известна ещё Мадхаве в IVX веке. В ответ на формулу Лейбница Ньютон вывел ряд

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Ряды вида

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

и

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$$

приписывают Эйлеру (см., напр., [1, упр. 52, стр. 71]).

Однако методы нахождения сумм рядов такого типа не достаточно хорошо развиты.

В работе классическими методами анализа найдена формула для суммы S_p ряда (2) в терминах элементарных функций. А именно, установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любого натурального p сумму S_p ряда (2) можно вычислить по формуле*

$$S_p = \frac{\ln 2}{p} + \frac{\pi}{p} \sum_{j=0}^{[(p-2)/2]} \left(1 - \frac{1+2j}{p}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi + 2\pi j}{2p}\right), \qquad (3)$$

где $[x]$ *- целая часть* x*, а сумма по пустому множеству равна* 0.

В частности, полагая $p = 1, 2, 3$ и 4 в равенстве (3), получим

$$S_1 = \ln 2, \quad S_2 = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad S_3 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad S_4 = \frac{\ln 2}{4} + \frac{(2\sqrt{2}+1)\pi}{8}.$$

Следствие 1. *Для каждого натурального* p *суммы* S_p *являются линейными комбинациями трансцендентных чисел* $\ln 2$ *и* π *с алгебраическими коэффициентами.*

Следствие 2. *Пусть* $p \in \mathcal{N}$. *Тогда ряд*

$$p \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{(2pn+m)(p(2n+1)+m)}$$

сходится и его сумма вычисляется по формуле (3).

Методы настоящей работы позволяют найти сумму рядов вида

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} + \ldots + \frac{1}{a(p-1)+b} - \frac{1}{ap+b} - \frac{1}{a(p+1)+b} - \ldots - \frac{1}{a(2p-1)+b} + \ldots,$$

где a, b и p - натуральные числа.

Интересно отметить, что если так же, как и в ряде (1), изменить знаки в сумме - ряде для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при натуральных значений $s > 1$ и применить методы настоящей работы, то для полученной суммы формулы, подобные формуле (3), по-видимому, будут содержать не только элементарные функции, но и некоторые специальные функции.

Источники и литература

1) *Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж.* Специальные функции. — Москва: МЦНМО, 2013.