Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Численное решение задач с тонким препятствием для оператора Лапласа в двумерной области

Научный руководитель – Апушкинская Дарья Евгеньевна

Борунов Семён Сергеевич

Студент (бакалавр)

Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: semborunov@yandex.ru

Рассмотрена задача с тонким препятствием Для оператора Лапласа в квадратной области. Такая задача возникает, например, в финансовой математике [2] или при моделировании мембраны, натягиваемой на тонкий объект. В работе получено численное решение и верифицированы апостериорные оценки отклонения приближенного решения от точного. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — открытое, связное, ограниченное множество, с липшицевой границей $\partial\Omega$. $\mathbf{M}$ —гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, которое делит Ω на две липшицевы подобласти $\Omega_+,\ \Omega_-$. Функция $\psi : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ — препятствие, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ такая что $\varphi \geq \psi$ на $\mathbf{M} \cap \partial\Omega$ – условия на границе. Функция ψ гладкая, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Задачей с тонким препятствием для оператора Лапласа называется задача минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

на множестве $K = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ на } \mathbf{M}, v = \varphi \text{ на } \partial\Omega\}$. Известно, что для такой задачи существует единственное решение [4] Мы будем рассматривать $\Omega = [0, a] \times [0, a]$, $\psi \equiv 0$, $\mathbf{M} = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$. Задача решается численно на регулярной сетке методом аффинной аппроксимации и координатной релаксации. Вокруг каждой внутренней точки сетки — v_{ij}, выбираются 6 прилежащих треугольников (см. рис.), в них строится аффинное приближение функции v и вычисляется $J(v)$. Эта же операция производится для $v_{ij} \pm h$. Новое значение в узле ij будет одно из набора $\{v_{ij},\ v_{ij}+h,\ v_{ij}-h\}$, доставившее наименьшее значение функционалу $J(v)$. В работе [1] были доказаны две оценки, которые выполняются $\forall v \in K$:

$$\|\nabla(u-v)\|_\Omega \leq \|\nabla v - q^*\|_\Omega + \sqrt{2}\int_{\mathbf{M}} \lambda(v-\psi)d\mu + C_{F_+}\|\operatorname{div} q^*\|_{\Omega_+} + C_{F_-}\|\operatorname{div} q^*\|_{\Omega_-} + C_{Tr_{\mathbf{M}}}\|\lambda - [q^* \cdot n]\|_{\mathbf{M}}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-v)\|^2_\Omega \leq{}& (1+\beta_1)\|\nabla v - q^*\|^2_\Omega \\ &+ (1+\beta_1^{-1})(1+\beta_2)\left[C_{F_+}\|\operatorname{div} q^*\|_{\Omega_+} + C_{F_-}\|\operatorname{div} q^*\|_{\Omega_-}\right]^2 \\ &+ (1+\beta_1^{-1})(1+\beta_2^{-1})C^2_{Tr_{\mathbf{M}}}\|\lambda - [q^* \cdot n]\|^2_{\mathbf{M}} \\ &+ 2\int_{\mathbf{M}} \lambda(v-\psi)d\mu,\end{aligned} \tag{2}$$

где $C_{F_\pm}$ — константы Фридрихса для $\Omega_\pm$, $C_{Tr_{\mathbf{M}}}$ — следовая константа, $q^* \in H(\Omega_\pm, \operatorname{div})$, $\lambda \in \Lambda$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$.
$H(\Omega_\pm, \operatorname{div}) = \{q^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} q^* \in L_2(\Omega_\pm), [q^* \cdot \mathbf{n}] \in L_2(\mathbf{M})\}$,
$\Lambda = \{\lambda \in L_2(\mathbf{M}), \lambda(x) \geq 0 \text{ п.в. на } \mathbf{M}\}$.

Оценка (2) допускает оптимизацию по q^*. Алгоритм оптимизации схож с алгоритмом поиска решения, но теперь ищется минимум правой части (2). В таблице предоставлены расстояния от точного до численных решений, которые строились на адаптивной сетке, и значения мажоранты (1). За $\mathfrak{M}(\nabla w)$ обозначена правая часть (1) при $q^* = \nabla w, \lambda = [\nabla w \cdot \mathbf{n}]$, $G(\nabla w)$— оператор регуляризации.

n points	$\|\nabla(u-v)\|_\Omega$	$\mathfrak{M}(\nabla u)$	$\mathfrak{M}(\nabla v)$	$\mathfrak{M}(G(\nabla v))$
49	0.023286	0.179052	0.869867	0.512364
97	0.025963	0.136945	1.130810	0.695407
193	0.027816	0.106575	1.607528	1.035288
385	0.028852	0.084644	2.294173	1.544271

Источники и литература

1) D.E. Apushkinskaya, S.I. Repin, Thin obstacle problem: Estimates of the distance to the exact solution. // Interfaces and Free Boundaries 20 (2018)
2) Cont, R., Tankov, P., Financial Modelling with Jump Processes. Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. Zbl1052.91043 MR2042661
3) R. Glowinski, Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. Springer, New York, 1984.
4) Lions, J.-L., Stampacchia, G. Variational inequalities. Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 493–519. Zbl0152.34601 MR0216344

Иллюстрации

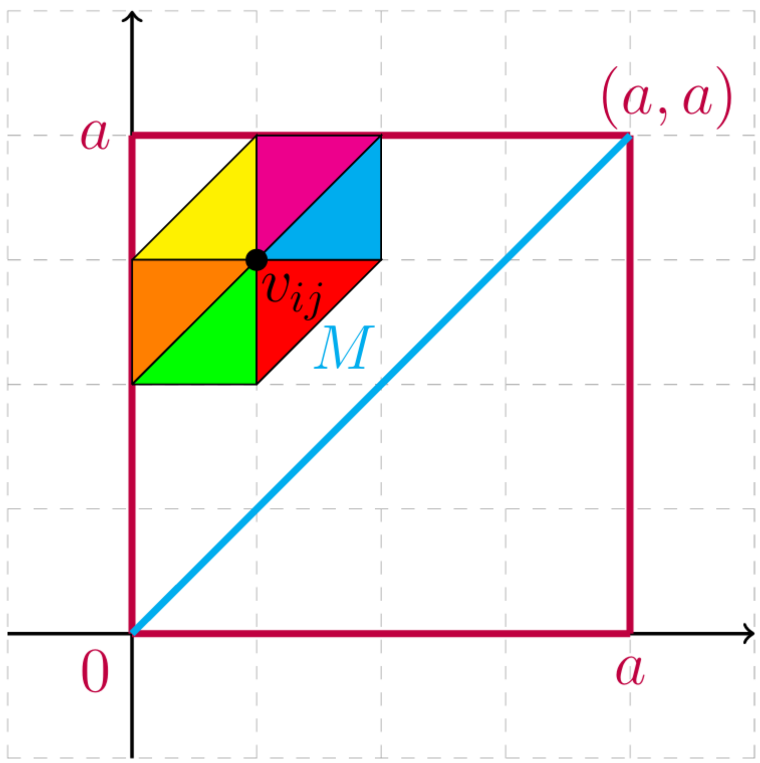

Рис. : Оптимизируемая точка и 6 прилежащих треугольников