Секция «Геометрия и топология»

Новые геодезические в классе Громова-Хаусдорфа, лежащие в облаках метрических деревьев

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Михайлов Иван Николаевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: ivan.mikhailov@math.msu.ru

Классическое расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y определяется как точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа между образами X' и Y' пространств X и Y по всем изометрическим вложениям $\phi\colon X \to Z$ и $\psi\colon Y \to Z$ в некоторое метрическое пространство Z. Впервые это расстояние было введено Дэвидом Эдвардсом в 1975 году ([2]) и позднее стало знаменитым благодаря работе Михаила Громова о группах полиномиального роста ([3]). Позднее появилось более эффективное для вычислений определение через искажения соответствий (т.е. многозначных сюръективных отображений, см. [1]).

Хорошо известно ([1]), что для ограниченного метрического пространства (X, d_X) отображение, умножающее его метрику на положительное число t, является непрерывным относительно расстояния Громова–Хаусдорфа и задаёт стягивание на классе всех ограниченных метрических пространств при $t \to 0$. Более того, кривая $\gamma(t) = tX$, $t \in [0, +\infty)$ является геодезической в классе Громова–Хаусдорфа. В известной монографии [4] Михаил Громов ввёл в рассмотрение классы метрических пространств на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга (в работе [5] такие классы были называны *облаками*) и анонсировал, что произвольное облако является стягиваемым. Возникает естественная гипотеза о том, что подобное стягивание должно снова порождаться умножением всех пространств облака на положительное число t, а все полученные кривые будут геодезическими. Оказывается, это неверно даже в случае некоторых естественных облаков, например, заданных $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой метрикой.

В докладе будет приведён упомянутый контрпример, а также построен класс метрических пространств в облаке вещественной прямой, для которых умножение метрики на положительное число t даёт геодезическую. После этого мы обсудим свойства отображения ультраметризации $\mathbf{U}$ — естественного способа сопоставить данному метрическому пространству некоторое ульттраметрическое пространство. В качестве приложений развитой техники будут представлены недавние результаты о равенстве расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа от метрических деревьев до некоторых их подмножеств ([6], [7]). Простым следствием этих результатов является конструкция альтернативных геодезических, соединяющих произвольную ε-сеть в $\mathbb{R}$ с $\mathbb{R}$ в классе Громова–Хаусдорфа.

Источники и литература

1) D. Edwards, *The structure of superspace*, Studies in Topology, Academic Press, 1975.
2) M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publications Mathematiques I.H.E.S., **53** 1981.
3) D. Yu. Burago, Yu. D. Burago, S. V. Ivanov, *A course in metric geometry*, Moscow-Izhevsk, Institute for Computer Research, 2004.

4) M. Gromov, *Structures metriques pour les varietes riemanniennes*, Textes mathematiques. Recherche (v. 1), CEDIC/Fernand Nathan, 1981.
5) S. A. Bogaty, A. A. Tuzhilin, *Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry*, ArXiv e-prints, arXiv:2110.06101, 2021.
6) H. Adams, S. Majhi, F. Manin, Z. Virk, N. Zava, *Lower-bounding the Gromov–Hausdorff distance in metric graphs*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2411.09182.
7) A.O. Ivanov, I.N. Mikhailov, A.A. Tuzhilin, *Gromov-Hausdorff Geometry of Metric Trees*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2412.18888