Секция «Геометрия и топология»

Конструктивное доказательство теоремы Планса для двухмостовых узлов

Научный руководитель – Медных Александр Дмитриевич

Соколова Галина Константиновна
Аспирант
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
Новосибирск, Россия
E-mail: 98gal@mail.ru

Пусть R — нетривиальное коммутативное кольцо с единицей, и C_g — сопровождающая матрица, ассоциированная с унитарным полиномом $g(t) \in R[t]$ степени $n \geq 2$. Отметим, что матричные полиномы $f(C_g)$ с коэффициентами из R образуют коммутативное кольцо, называемое *сопутствующим кольцом* полинома $g(t)$.

В статье В. Ноферини и Г. Уильямса [1] была рассмотрена сопровождающая матрица произведения полиномов и получен результат, связывающий формы Смита матричных полиномов $f(C_g)$ и $F(C_G)$, где F и G — делители f и g соответственно. Этот результат был применён к вычислению формы Смита циркулянтной матрицы $f(C_g)$, где $f(t)$ — полином Александера торического узла и $g(t) = t^n - 1$, что позволило определить гомологии всех трёхмерных многообразий Брискорна $M(r, s, n)$.

В данном работе рассматриваются композиции полиномов $f = F \circ h$ и $g = G \circ h$, где h — унитарный полином степени m. Сформулируем теорему, которая связывает формы Смита матричных полиномов $f(C_g)$ и $F(C_G)$.

Теорема. Пусть $g(t) \in R[t]$ — унитарный полиномом, и $f(t) \in R[t]$. Предположим, что существуют полиномы $F(t), G(t) \in R[t]$ такие, что $f(t) = F \circ h(t)$ и $g(t) = G \circ h(t)$, где $h(t)$ является унитарным полином степени m. Тогда выполняется соотношение элементарной эквивалентности

$$f(C_g) \sim \mathrm{diag}(\underbrace{F(C_G), F(C_G), \ldots, F(C_G)}_{m}).$$

Указанный результат в докладе будет применён к конструктивному доказательству теоремы Планса для двухмостовых узлов. Матрицы, задающие группы V и V', будут описаны в терминах полиномов Чебышёва четвёртого и второго рода соответственно.

Теорема Планса. Пусть M_n является n-листным циклическим накрытием сферы $\mathbb{S}^3$, разветвлённым над двухмостовым узлом K. Справедливы следующие утверждения.

1° Если n нечётно, то группа гомологий $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ раскладывается в прямую сумму двух копий некоторой абелевой группы V.

2° Если n чётно, то накрывающее отображение $\varphi : M_n \to M_2$ индуцирует сюръективный гомоморфизм $\varphi_* : H_1(M_n, \mathbb{Z}) \to H_1(M_2, \mathbb{Z})$, ядро которого раскладывается в прямую сумму двух копий некоторой абелевой группы V'.

Источники и литература

1) Noferini V., Williams G. Matrices in companion rings, Smith forms, and the homology of 3-dimensional Brieskorn manifolds // J. Algebra. 2021. V. 587. P. 1–19.

2) Plans A. Aportacion al estudio de los grupos de homologia de los recubrimientos ciclicos ramificados correspondiente a un nudo // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat. Madr. 1953. V. 47. P. 161–193.