

Структурная устойчивость особенностей коранга 1 интегрируемых систем

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Онуфриенко Мария Викторовна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
 Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
 приложений, Москва, Россия
 E-mail: mary.onufrienko@gmail.com

Мы изучаем структурную устойчивость особенностей коранга 1 типичных интегрируемых систем на 4- и 6-мерных симплектических многообразиях. Ранее была получена классификация (с точностью до послыйного диффеоморфизма) таких особенностей и доказано, что вблизи орбиты коранга 1 слоение Лиувилля интегрируемой системы диффеоморфно стандартной модели [2, 3, 5, 6]. Эти особенности в 4-мерном случае представляют собой параболические орбиты с резонансами [2], а в 6-мерном случае — бифуркации таких орбит. Мы доказываем структурную устойчивость этих особенностей, строим локальные бифуркационные диаграммы, фазовые портреты и их бифуркации [8].

Определение 1. Интегрируемая гамильтонова система на $2n$ -мерном симплектическом многообразии (M, ω) задается гладким отображением $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\{f_i, f_j\} = 0$. Возникает лагранжево слоение с особенностями на (M, ω) , называемое *слоением Лиувилля*, слоями которого являются связные компоненты множеств $\mathcal{F}^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^n$. Регулярные компактные слои представляют собой торы Лиувилля. Предположим, что M компактно и система вещественно-аналитическая. Тогда возникает гамильтоново $\mathbb{R}^n$ -действие на M , порожденное отображением $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{S}(M)$ — класс интегрируемых систем (называемых *полуторическими*) на M , для которых функции $f_2, \dots, f_n$ порождают локально-свободное гамильтоново действие $(n-1)$ -тора на M . Такое действие существует вблизи орбит коранга 1, согласно [3].

Определение 2. Определим *стандартную модель* полулокальной особенности (т.е. компактной $\mathbb{R}^n$ -орбиты) коранга 1 как систему, заданную на симплектическом многообразии

$$M_{st} = (D^2 \times D^{n-1} \times T^{n-1})/G, \quad \omega_{st} = dx \wedge dy + \sum_{i=1}^{n-1} dI_i \wedge d\varphi_i,$$

инволютивным набором функций $\mathcal{F}_{st} = (H, I_1, \dots, I_{n-1})$, где $H = H_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, I)$ — функция Гамильтона, $k = 0, 1, 2$, $\mathbf{z} = (x, y)$, $z = x + iy$, действие группы $G = \mathbb{Z}_s$ на прямом произведении $D^2 \times D^{n-1} \times T^{n-1}$ имеет вид $(x, y, I, \varphi) \mapsto (x \cos(\frac{2\pi\ell}{s}) - y \sin(\frac{2\pi\ell}{s}), x \sin(\frac{2\pi\ell}{s}) + y \cos(\frac{2\pi\ell}{s}), I, \varphi_1 + \frac{2\pi}{s}, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$, где $0 < \ell < s$, $(\ell, s) = 1$.

Таким образом, стандартной моделью является полуторическая интегрируемая система $(M_{st}, \omega_{st}, \mathcal{F}_{st})$ с гамильтонианом H и компактной $(n-1)$ -мерной орбитой $\mathcal{O}$ вида $x = y = I_1 = \dots = I_{n-1} = 0$, имеющей мультипликаторы $e^{\pm \frac{2\pi\ell i}{s}} = \xi^{\pm \ell}$ (с $\xi = e^{2\pi i/s}$), скручивающий резонанс $\ell/s \bmod 1$ (см. [5]) и порядок резонанса $s = |G|$ (см. [2]).

Стандартная функция Гамильтона $H = H_{s,k,\alpha}$ определяется следующим образом: как функция Морса $H_{s,0}(x, y) = |z|^2 = x^2 + y^2$ (при $k = 0$ и $s \geq 3$) или $H_{s,0}(x, y) = x^2 \pm y^2$ (при $k = 0$ и $s = 1, 2$), и как два семейства функций $H_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ при $k = 1, 2$ и $s \geq 1$:

$$H_{s,1,\alpha}(\mathbf{z}, \varepsilon) = \begin{cases} \eta x^2 + y^{s+2} & +\varepsilon y^s, & s = 1, 2, \\ \operatorname{Re}(z^3) & +\varepsilon |z|^2, & s = 3, \\ \operatorname{Re}(z^4) + \alpha |z|^4 & +\varepsilon |z|^2, & s = 4, \alpha^2 \neq 1, \\ \operatorname{Re}(z^s) + |z|^4 & +\varepsilon |z|^2, & s \geq 5, \end{cases}$$

$$H_{s,2,\alpha}(\mathbf{z}, \varepsilon) = \begin{cases} \eta x^2 + y^{2s+2} & +\varepsilon_2 y^{2s} + \varepsilon_1 y^s, & s = 1, 2, \\ \operatorname{Re}(z^4) + \eta |z|^4 + |z|^6 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, & s = 4, \\ \operatorname{Re}(z^5) + |z|^6 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, & s = 5, \\ \operatorname{Re}(z^6) + \alpha |z|^6 + |z|^8 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, & s = 6, \alpha^2 \neq 1, \\ \operatorname{Re}(z^s) + |z|^6 + \alpha |z|^8 & +\varepsilon_2 |z|^4 + \varepsilon_1 |z|^2, & s \geq 7. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon = (\varepsilon_i) \in \mathbb{R}^k$ — малый параметр, $\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр (т.н. *модуль*), $\eta = \pm 1$, $z = x + iy$.

Определение 3. Полулокальная особенность (компактная $\mathbb{R}^n$ -орбита) вещественно-аналитической интегрируемой системы $(M, \omega, \mathcal{F})$ называется *структурно устойчивой*, если существует окрестность $U^{\mathbb{C}}$ в $M^{\mathbb{C}}$ такая, что для любой вещественно-аналитической системы $(\overline{U}^{\mathbb{C}}, \tilde{\omega}^{\mathbb{C}}, \tilde{\mathcal{F}}^{\mathbb{C}})$, достаточно близкой к данной системе в $U^{\mathbb{C}}$ относительно C^∞ -топологии, верно соотношение $\tilde{\mathcal{F}} = \phi \circ \mathcal{F} \circ \Phi$, где $\Phi : U \rightarrow M$ и $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вложение и гомеоморфизм соответственно, близкие к тождественным. Если Φ является аналитическим диффеоморфизмом на свой образ, особенность называется *гладко структурно устойчивой*.

Теорема 1 ([6, 8]). Пусть $n = \frac{1}{2} \dim M \in \{2, 3\}$ и $\mathcal{S}_{st} \subseteq \mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$ означает класс систем, у которых все полулокальные особенности послойно диффеоморфны стандартным. Тогда $\mathcal{S}_{st}$ открыт и плотен в $\mathcal{S}$ относительно C^∞ -топологии. Любая особенность, послойно диффеоморфная стандартной модели, в которой модуль присутствует (соответственно отсутствует), структурно устойчива (соответственно гладко структурно устойчива) относительно малых интегрируемых возмущений системы.

Первая часть теоремы 1 не следует из классификации в [1]. Мы строим локальные бифуркационные диаграммы и фазовые портреты всех этих особенностей и, как следствие, получаем вторую часть теоремы 1. Фазовые портреты при $s \geq 5$ были построены в [4] для систем без предположения об интегрируемости. Для особенностей коранга 2 получена классификация, и для резонансов порядка $\neq 4$ доказана структурная устойчивость [7].

Автор благодарен Е.А. Кудрявцевой за постановку задачи и ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 24-71-10100 в МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

- 1) Wassermann G. Classification of singularities with compact Abelian symmetry // Singularities Banach Center Publications. 1988. V. 20. P. 475–498.
- 2) Kalashnikov V.V. Typical integrable Hamiltonian systems on a four-dimensional symplectic manifold // Izv. Math. 1998. V. 62. No. 2. P. 261–285.
- 3) Zung N.T. A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems // Comment. Math. Helv. 2000. V. 75. P. 271–283.
- 4) Gelfreich V. and Gelfreich N. Unique normal forms near a degenerate elliptic fixed point in two-parametric families of area-preserving maps // Nonlinearity. 2014. V. 27. P. 1645–1667.
- 5) Kudryavtseva E.A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // European J. Math. 2022. V. 8. P. 1487–1549.
- 6) Kudryavtseva E.A., Onufrienko M.V. Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group // Russ. J. Math. Phys. 2023. V. 30. No. 1. P. 76–94.

- 7) Kudryavtseva E.A., Lerman L.M. Bifurcations in integrable systems with three degrees of freedom – I // Proc. Steklov Inst. Math. 2024. V. 327.
- 8) Ali A.Z., Kibkalo V.A., Kudryavtseva E.A., Onufrienko M.V. Bifurcations in integrable Hamiltonian systems near corank-one singularities // Differ. Eq. 2024. V. 60. No. 10. P. 1311–1368.