Секция «Геометрия и топология»

Об условии открытого множества для самоподобных множеств в Гильбертовом пространстве

Научный руководитель – Тетенов Андрей Викторович

Кадирова Махлиё Бобохон кизи

Аспирант

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия

E-mail: m.kadirova@g.nsu.ru

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ - система сжимающихся отображений в полном метрическом пространстве X. Существует единственное компактное непустое множество K, удовлетворяющее равенству $K = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_i(K)$. Множество K называется аттрактором системы $\mathcal{S}$.

Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию открытого множества (OSC), если существует непустое открытое множество $\mathcal{O} \subset X$ такое, что $S_i(\mathcal{O})$, $\{1 \leq i \leq m\}$ попарно не пересекаются и все содержатся в $\mathcal{O}$.

Определение 1. Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет слабому условию отделимости (WSP) если Id не является предельной точкой F, где $F = \{S_{\mathbf{i}}^{-1} S_{\mathbf{j}} : \mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ несравнимы$\}$.

Мы доказываем, что если система $\mathcal{S}$ удовлетворяет OSC и $X = \mathbb{R}^d$, то множество адресов $\pi^{-1}(x)$ любой точки x аттрактора K конечно. Это следует из теоремы М.Цернера даже в том случае, когда $\mathcal{S}$ имеет слабое условие отделимости:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ — система сжимающихся подобий в $\mathbb{R}^d$, а K — её аттрактор. Если $\mathcal{S}$ имеет WSP, то существует M такое, что для любого $x \in K$, $\#\pi^{-1}(x) \leq M$.*

Таким образом, возможно, что в гильбертовом пространстве H существуют системы $\mathcal{S}$, которые удовлетворяют OSC, и в то же время аттрактор K из $\mathcal{S}$ содержит точки с бесконечным набором адресов.

Теорема 2. *Если аттрактор K системы $\mathcal{S}$ содержит точку x, имеющую бесконечный набор адресов, то $H^s(K) = 0$.*

Мы также приводим пример самоподобного множества в Гильбертовом пространстве, которое удовлетворяет условию открытого множества и содержит точку с бесконечным набором адресов и имеет нулевую меру в своей Хаусдорфовой размерности.

Источники и литература

1) J.Kotus, M. Urbanski. *Meromorphic Dynamics: Abstract Ergodic Theory, Geometry, Graph-Directed Markov Systems, and Conformal Measures.* – Cambridge University Press, 2023.
2) R.D. Mauldin, T. Szarek, M. Urbanski. *Graph directed Markov systems on Hilbert spaces.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2009;147(2):455-488. doi:10.1017/S0305004109002448
3) M. P. W. Zerner, *Weak separation properties for self-similar sets,* Proc. Amer. Math. Soc. **124**:11 (1996), pp. 3529–3539.